Señales Generalizadas y Distribuciones. Las Señales Impulso y Escalón Unitario. (versión 1) PS2315: "Sistemas"

Prof. José Ferrer Dpto. Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar

Abril-Julio 2012

Abstract

En estas notas definimos las señales generalizadas cuya teoría formal es sumamente complicada para los ingenieros. Sin embargo, nuestra presentación será enciclopédica hasta casí histórica. Pero lo haremos en dos etapas: a) desde la visión original de Dirac (la misma de los físicos e ingenieros hoy en día); b) la de Temple que se fundamenta en la teoría de señales generalizadas. También presentaremos una serie de ejemplos que facilitarán entender el concepto de las principales señales generalizadas como lo son el impulso y la señal escalón.

1 Señales Generalizadas: el Impulso y el Escalón Unitario

Las funciones o señales con índice de tiempo $\mathcal{T}$ y rango K vistas hasta ahora, son señales denominadas regulares en el sentido que son especificadas punto a punto. Las señales regulares tienen la gran desventaja que no permiten modelar fenómenos físicos que ocurren "instantáneamente" tales como la carga de un condensador a través de cables sin resistencias. Esto motiva el proceso de agrandar el conjunto de todas las señales regulares (S_e) añadiendo las llamadas señales singulares. Estas son funciones que no pueden definirse punto a punto sino indirectamente mediante su efecto sobre un conjunto de señales llamadas funciones de prueba. El conjunto de todas las señales regulares y todas las señales singulares se denomina el conjunto de señales generalizadas.

Comenzaremos paulatinamente de tal manera que los lectores puedan entender la teoría y las aplicaciones de tan importante tópico de la Teoría Metemática de Sistemas.

El impulso unitario δ d tiempo contínuo, o función delta, es considerada por ahora cmo una anomalía matemática. En 1930, Paul A. dirac, famoso físico y premio Nóbel, usó tal señal por primera vez en sus escritos sobre mecánica cuántica. El definió (y nosostros los ingenieros también la definimos de esta manera en nuestros cursos básicos) a la señal impulso o delta unitario, $\delta(t)$, como aquella señal que cumplía con

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\, d\tau &= 1 \\ \delta(t) &= \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ +\infty, & t = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

y una de sus propiedades más importante es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, \delta(\tau)\, d\tau = f(0)$$

donde f es una señal en $S_e = S_e[(-\infty, +\infty), R]$ la cual es "continua" en $t = 0$.

Antes de continuar, no solo hay que aclarar por qué es importante estudiar esa señal sino también ver como ella surge de una manera natural en el análisis y síntesis de sistemas lineales (aún en los más sencillos).

Considere la elemental red eléctrica lineal mostrada en la figura (1)

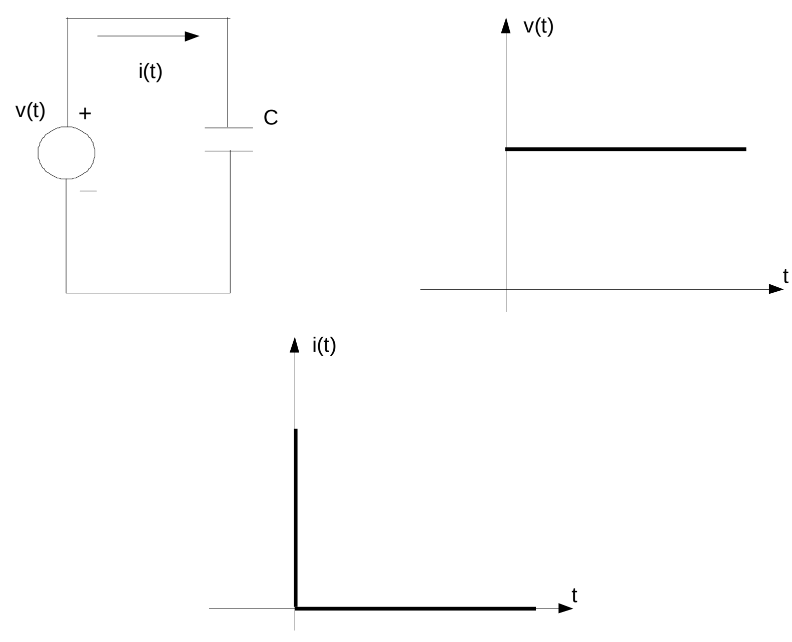


Figure 1: El dilema de diferencialidad como resultado de la idealización de una señal y un componente eléctrico.

Supógase que se desea calcular la corriente $i(t)$ que circula a través del condensador; C, cuando se aplica la señal $v(t) = esc(t)$. A pesar de lo sencillo de la red, aparece de inmediato un dilema: la corriente que se genera en el circuito está dada por

$$i\left(t\right)=C\frac{d}{dt}v\left(t\right)$$

pero esa derivada es cero en todo $t\in\left(-\infty,+\infty\right)-\{0\}$. Esto es, la derivada no existe en el instante de tiempo donde ocurre la discontinuidad del voltaje v (tal como se ilustra en la figura). Dado que el razonamiento y la práctica en la vida diaria indica que alguna corriente debe fluir con el objeto que se cargue el condensador, debemos concluir que las matemáticas empleadas no han generado un "modelo" satisfactorio tanto para la señal $i\left(t\right)$ o el elemento C. La dificultad radica en que simplemente se ha "idealizado" la señal del voltaje commo la red C. ¿Qué se puede hacer? La respuesta es desidealizar ya sea la señal o la red para poder obtener un modelo adecuado que describa lo más cercano posible el flujo de corriente en la red. (En estas notas debemos enteder que un modelo es cualquier medio que nos permita representar o aproximar un fenómeno físico dado).

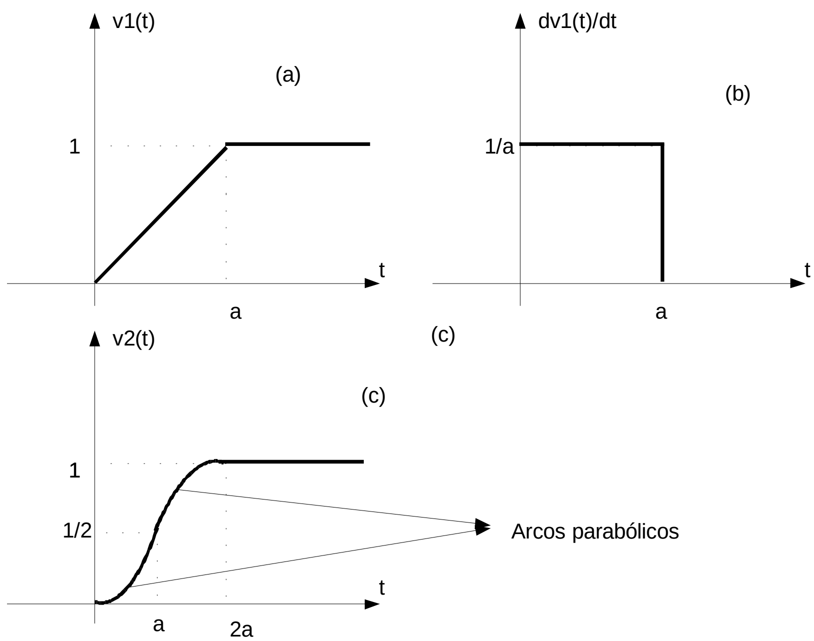


Figure 2: Diferenciación repetida de un escalón aproximado.

Dirac denominó a la señal delta unitaria, δ, como una señal impropia, debido a que para esa época no se conocía una justificación matemática rigurosa de su existencia y/o utilidad. Pero en 1950, Laurent Schwartz publicó un libro titulado "The theory of Distributions" en el cual suministró, entre otras cosas, las bases formales, rigurosas y satisfactorias para entender y justificar el uso de la señal impulso. Sin embargo, la teoría de distribuciones resultó ser demasiado abstracta no solo para los matemáticos aplicados pero también para los físicos e ingenieros. No fue hasta 1953, cuando George Temple construyó una teoría mas sencilla (aunque no menos rigurosa) mediante el uso de las señales generalizadas. En estas notas, nos limitaremos a la definición de la señal generalizada escalón unitario y su derivada, el impulso unitario.

La figura (2) muestra dos de las muchas (de hecho infinitas) formas posibles en la que puede desidealizarse la señal escalón unitario. En estas aproximaciones se reemplaza la discontinuidad de dos distintas maneras distintas; en una primera señal (ver figura 2-a) esta es sustituita por un intervalo corto de rápida elevación pero continuo; o sea,

$$v_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{a}t, & t \in [0, a), \\ 1, & t \geq a. \end{cases}$$

y la discontinuidad es sustituida por una rampa finita de pendiente $\frac{1}{a}$, y la señal se aproxima al escalón unitario a medida que la longitud del intervalo de la rampa, a, se hace pequeño. Noten que la rampa es diferenciable y por lo tanto la derivada de la señal $v_1(t)$ (!en todas partes excepto en $t = a$¡) tal como se muestra en la figura (2-c). Aparte del factor de escala vertical igual al valor de la capacitancia C, la señal $\frac{d}{dt}v_1$ representa aproximadamente la forma de onda de la corriente en el condensador. Más aún, a medida que $a \to 0$, esta forma de onda se aproxima a la señal delta de Dirac o impulso unitario. Un pulso de cuya duración es muy pequeña, pero cuya área es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [Dv_1](\tau)\, d\tau = 1$$

(con $D = \frac{d}{dt}$) independientemente del valor de a, ya que

$$\frac{d}{dt}v_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{a}, & t \in [0, a), \\ 0, & t \geq a. \end{cases}$$

Lo anterior concuerda con la necesidad física de que una cantidada definida de carga debe suministrarse al condensador, con el objeto de cambiar su voltaje de un valor fijo a otro.

Aquí el escalón ideal no diferenciable se ha visualizado como la "forma límite" de una función diferenciable (v_1), y nos evitamos dificultades acordando de no llevar a cabo el proceso límite hasta después de la diferenciación. Más aún, después de la difernciación es el "proceso" de sacar el limite, más bien que el límite mismo el que proporciona un modelo físico útil; o sea, Un pulso de corriente de área finita, gran magnitud y de duración arbitrariamente pequeña, pero diferente de cero, es un concepto útil para modelar similares procesos físicos parecidos al de la corriente que estamos estudiando, mientras que la (2)-b resulta sin sentido (en la terоría tradicional de funciones) cuando ponemos el parámetro a exactamente igual a cero.

"Para seguridad nuestra, el valor principal del cálculo elemental es que un límite completamente fuera de la comprensión humana, puede entenderse en términos de los procesos límites".

Otra manera de evadir la discontinuidad en el escalón unitario se muestra en una segunda señal (ver figura 2-c) v_2 definida por

$$v_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{2a^2}t^2, & t \in [0, a], \\ \frac{1}{2a^2}\left(2a^2 - (t-2a)^2\right), & t \in [a, 2a], \\ 1, & t \geq 2a. \end{cases}$$

Aquí no solamente la señal de tiempo continuo v_2 es "continua" sino también su derivada

$$\frac{d}{dt}v_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{a^2}t, & t \in [0, a], \\ -\frac{1}{a^2}(t-2a), & t \in [a, 2a], \\ 0, & t \geq 2a. \end{cases}$$

y mas aún, podemos hallar la segunda derivada:

$$\frac{d^2}{dt^2}v_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{1}{a^2}, & t \in [0, a], \\ -\frac{1}{a^2}, & t \in [a, 2a], \\ 0, & t \geq 2a. \end{cases} \tag{1}$$

y cuyas representaciones gráficas se muestran en la figura (3)

y es interesante que en límite cuando $a \to 0$, el primer momento de la segunda derivada es constante. Esto es:

$$m_1(Dv_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau.Dv_2(\tau)\,d\tau = -1$$

Nota: En general, el j-ésimo momento de una señal f se define como

$$m_j(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^j.f(\tau)\,d\tau$$

Por lo tanto, si queremos extender a grados mas altos de uniformidad mediante la señal de aproximación v_n $(n \geq 2)$, que permiten mayor número de diferenciaciones, es obvia pero la contabilidad resulta mas complicada.

Ahora bien, al analizar los sistemas (aunque no hemos definido formalmente el concepto de sistemas, todos sabemos lo que significa) que diferencian la señal varias veces, es más conveniente desidealizar el sistema, más bien que la señal. La derivada aproximada de una señal f está dada pro

$$\frac{\triangle f}{\triangle t}(t) = \frac{f(t) - f(t-a)}{a} \tag{2}$$

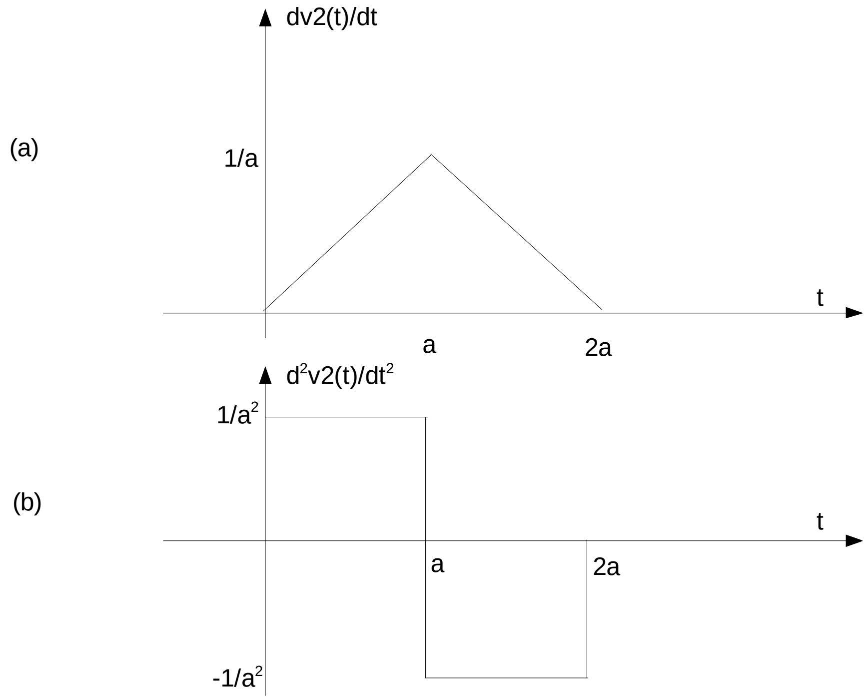


Figure 3: Diferenciación de un escalón unitario aproximado (continuación)

en donde a es la longitud de cierto intervalo de tiempo,$[t-a,t]$, pequeño pero diferente de cero. Si la señal f es una función suave (o uniforme), entonces (2) se aproxima a la verdadera derivada de f en t a medida que $a \to 0$. Con el parámetro a pequeño pero difrente de cero, (2) nos da la derivada aproximada de una señal discontinua. el escalón unitariod se define como

$$esc\,(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

y su derivada aproximada es, por lo tanto,

$$esc^{(0)}\,(t;a) = \frac{esc\,(t) - esc\,(t-a)}{a}$$

que es exactamente la señal mostrada en (1-c). Derivadas aproximadas de orden superior $(f^{(2)}, f^{(3)}, ...)$, hechas también de pulsos rectangulares, pueden encontrarse mediante la fórmula iterativa

$$esc^{(j+1)}\,(t;a) = \frac{esc^{(j)}\,(t) - esc^{(j)}\,(t-a)}{a}$$

para $j = 0, 1, 2, \cdots$.

Las funciones "pulsantes" o impulsivas pueden caracterizarse en términos de sus momentos. Por ejemplo, el $n-$ésimo momento de $esc^{(j)}$ está dado por

$$m_n\left[esc^{(j)}(t;a)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\tau^n.esc^{(j)}(\tau;a)\,d\tau=\left\{\begin{array}{cc}0, & n<j,\\ (-1)^j\,j!, & n=j,\\ \text{orden de } a^{n-j}, & n>j, n+j \text{ impar},\\ 0, & n>j, n+j \text{ par.}\end{array}\right. \tag{3}$$

en donde n,j son enteros no negativos. En consecuencia, la señal impulsiva $esc^{(j)}$ tiene la propiedad de que solamente su $j-$ésimo momento es importante para a pequeña.

Las derivadas superiores de un escalón ideal pueden definirse como el límite al que se acerca la derivada aproximada, conforme $a\to 0$,

$$delta^{(j)}(t)=\lim_{a\to 0}esc^{(j)}(t;a) \tag{4}$$

para $j=0,1,2,3,\cdots$.*Note* que $delta^{(0)}=\delta$, $delta^{(1)}=\delta^{(1)}$ conocida como el doblete, etc.

Y por lo tanto, vemos que

$$\delta(t)=\lim_{a\to 0}esc^{(0)}(t;a)=\lim_{a\to 0}\frac{esc(t)-esc(t-a)}{a}$$

y de inmediato se concluye que la señal impuslso unitario tiene las propiedades que Dirac postuló y demostró cuando la definió por primera vez:

a) integrando

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\,d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{a\to 0}\frac{esc(t)-esc(t-a)}{a}d\tau\\ &= \lim_{a\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{esc(t)-esc(t-a)}{a}d\tau=1\end{aligned}$$

y

b) de la gráfica cuando se toma el límite

$$\delta(t)=\left\{\begin{array}{cc}\infty, & t=0,\\ 0, & t\neq 0.\end{array}\right.$$

y por lo tanto, el area toda del impulso está concetrada alrededor de cero ya que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)\,d\tau=\int_{0^-}^{0^+}\delta(\tau)\,d\tau=1$$

Por lo tanto, cualquier integral cuyos intervalo de integración no incluya o pase $\tau=0$ es cero, tal como se expresa a continuación

$$\int_{-\infty}^{0^-}\delta(\tau)\,d\tau=\int_{0^+}^{+\infty}\delta(\tau)\,d\tau=0$$

El cambio de escala temporal y el desplazamiento temporal también aplica a la señal impulso unitario. La derivada de un escalón de altura A ydesplazado h unidades de tiempo, o sea,

$$Aesc\,(t-h) = \begin{cases} A, & t \geq h, \\ 0, & t < h. \end{cases} \tag{5}$$

genera un impulso que "ocurre" en $t = h$ y de magnitud A, o sea

$$A\delta\,(t-h) = ADesc\,(t-h) \tag{6}$$

donde $D = \frac{d}{dt}$ es el operador derivada. (El proceso se ilustra en la figura (4))

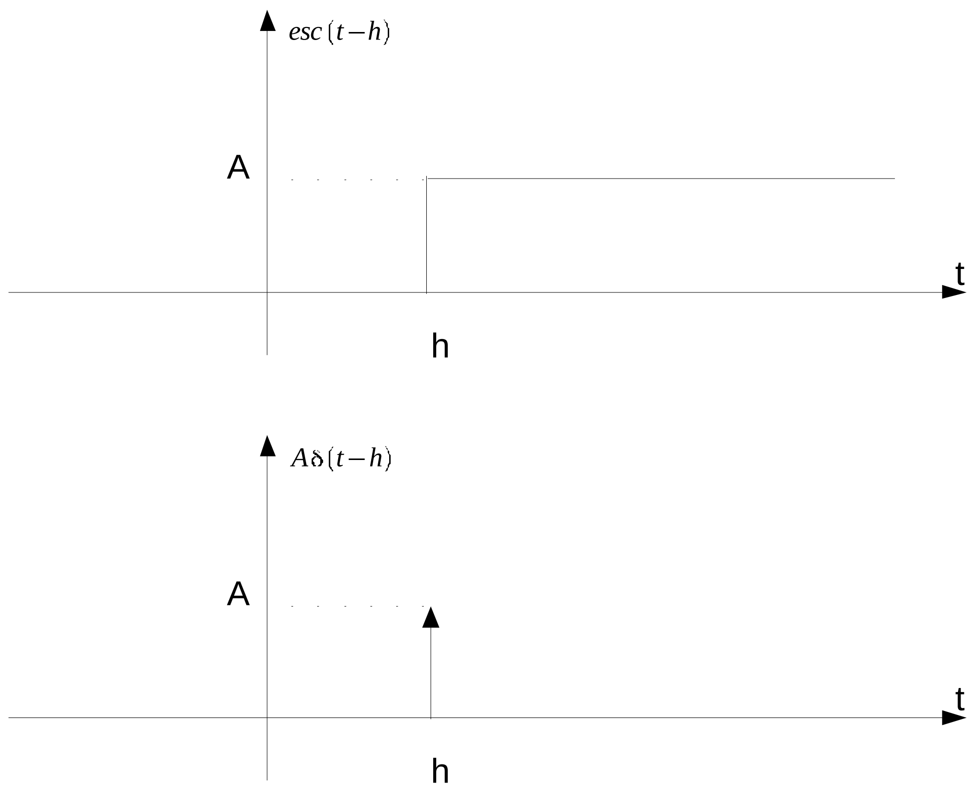


Figure 4: Generación de un impulso desplazado h unidades

Las implicaciones de las ecuaciones (5) y (6) se consideran a continuación.

Considere una señal f mostrada en la figura (5)

Note que la señal f tiene una discontinuidad (simple) en $t = h$ de altura A, esto es:

$$f\left(h^{+}\right) - f\left(h^{-}\right) = F + A - F = A$$

Si definimos

$$f_1\,(t) = \begin{cases} f\,(t)\,, & t < h, \\ f\,(t) + A & t \geq h \end{cases}$$

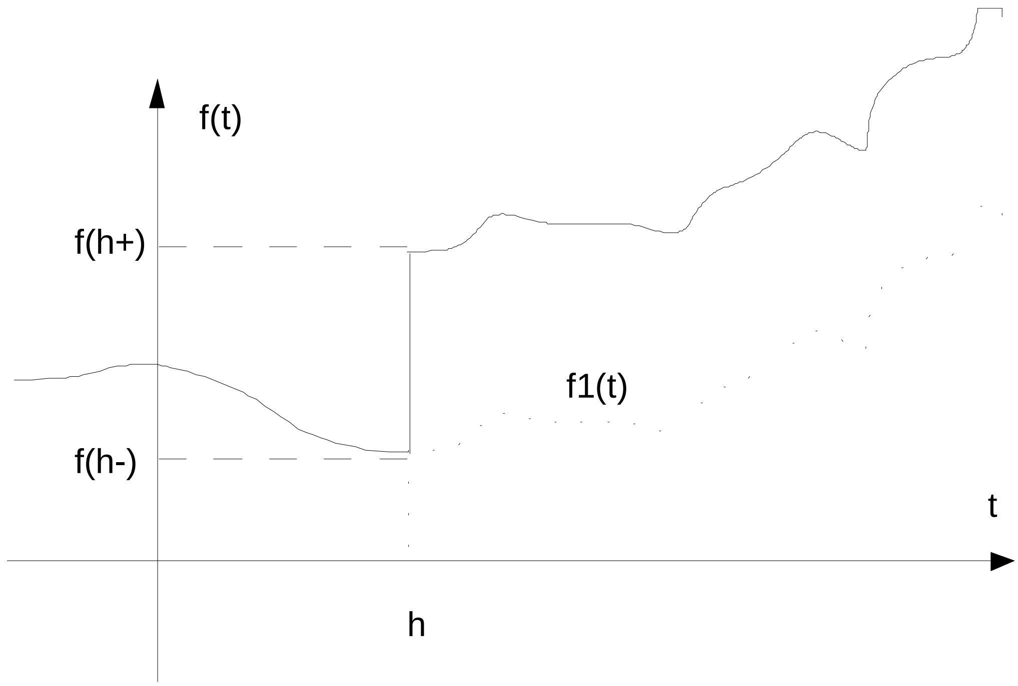


Figure 5: Señal con discontinuidad en $t = h$

Vemos que f_1 tiene la misma forma de onda que f pero sin la discontinuidad en $t = h$, esto es

$$f_1(t) = f(t) - A.esc(t-h)$$

Y en consecuencia

$$f^{(1)}(t) = f_1^{(1)}(t) + A\delta(t-h)$$

EJEMPLO 1 *Considere las señales mostradas en la figura (6)*

de inmediato vemos que la señal g puede expresarse como

$$g(t) = d.esc(t-a) - d.esc(t-b)$$

y por lo tanto

$$g^{(1)}(t) = d.\delta(t-a) - d.\delta(t-b)$$

tal como se muestra en la misma figura, ya que f tiene dos continuidades simples en $t = a$ y $t = b$. note que el peso de ponderación del impulso $\delta(t-b)$ es $-b$ debido a que

$$f\left(b^+\right) - f\left(b^-\right) = 0 - d = -d$$

Por otro lado, la señal g tiene como derivada

$$g^{(1)}(t) = \Pi_5(t-2.5) + 3\delta(t-5)$$

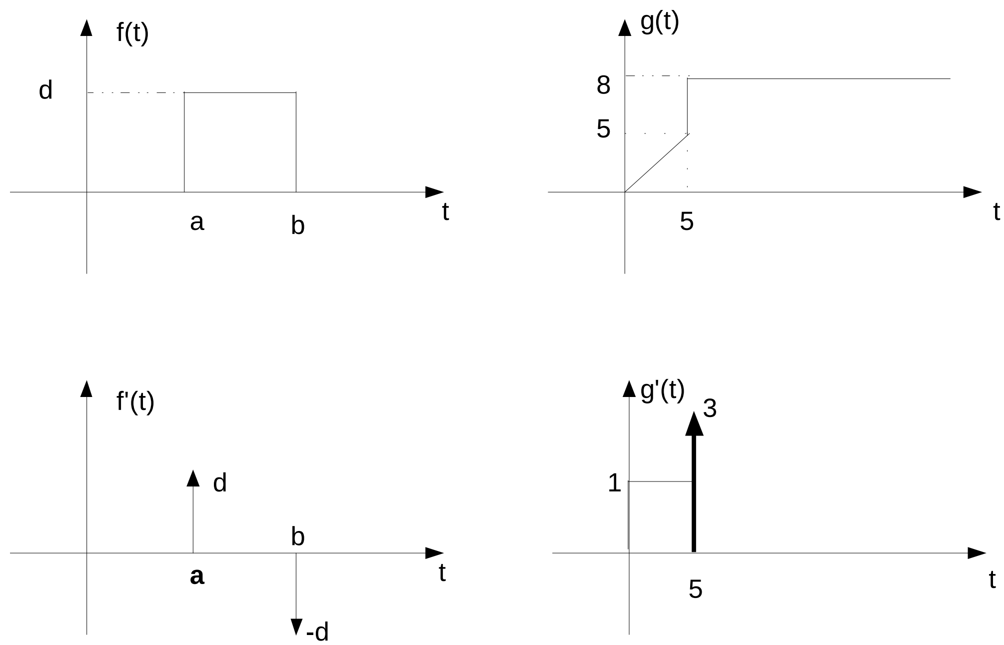


Figure 6: Derivadas de señales discontinuas que generan señales impulsivas

y una vez más llamamos la atención a que se genera un impulso de magnitud 3 *en* $t = 5$ *debido a que*

$$g\left(5^{+}\right) - g\left(5-\right) = 8 - 5 = 3$$

Otra propiedad interesante de la señal impulso unitario que podemos "postular" es la propiedad de tamizado: para toda señal ϕ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\tau\right)\delta\left(\tau - h\right)d\tau = \phi\left(h\right)$$

Esta integral se evalúa fácilmente si se considera que $\delta\left(t-h\right) = 0$ para todo $t \neq h$. por lo tanto

$$\phi\left(t\right)\delta\left(t-h\right) = 0$$

para todo $t \neq h$ y

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(\tau\right)\delta\left(\tau - h\right)d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi\left(h\right)\delta\left(\tau - h\right)d\tau \\
&= \phi\left(h\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\tau - h\right)d\tau \\
&= \phi\left(h\right)
\end{aligned}$$

EJEMPLO 2 *Sea* $\phi(t) = \cos(\omega t), t \in (-\infty, +\infty)$, *entonces*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,\delta(\tau - h)\,d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\tau)\,\delta(\tau - h)\,d\tau \\ &= \cos(\omega h)\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 *Sea* $\phi(t) = \sin t, t \in (-\infty, +\infty)$, *entonces*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\tau)\,\delta\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right) d\tau = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Considere las derivadas "no formales" de orden superior de la señal escalón. Para eso nos valemos de la figura (3) y de la relación (1) y vemos quela derivada de la señal impulso puede definirse como la segunda derivada de la señal escalón

$$\delta^{(1)}(t) = \lim_{a \to 0} D^2 esc(t, a)$$

La señal impulsiva resultante, $\delta^{(1)}$, se denomina doblete, y de inmediato se observa que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(1)}(\tau)\,d\tau = 0$$

Mientras que otra propiedad del doblete (la cual puede emplearse para su definición como veremos mas adelante): Para toda señal ϕ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,\delta^{(1)}(\tau - h)\,d\tau = -\phi^{(1)}(h)$$

La "demostración" (¡es informal!) de tal relación es por integración por partes

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,\delta^{(1)}(\tau - h)\,d\tau &= \phi(t)\,\delta(t - h)\big|_{t=-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{(1)}(\tau)\,\delta(\tau - h)\,d\tau \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{(1)}(\tau)\,\delta(\tau - h)\,d\tau = -\phi^{(1)}(h).\end{aligned}$$

Y puede demostrarse que en general:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,\delta^{(n)}(\tau - h)\,d\tau = (-1)^n\,\phi^{(n)}(h)$$

donde $f^{(n)}$ y $\delta^{(n)}$ representan la $n-$ésima derivada de las señales f y δ respectivamente.

Como suplemento definiremos también el conjunto de señales obtenidas por medio de las integraciones sucesivas de un escalón unitario ideal

$$esc_{(-j)}(t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} esc(t) \tag{7}$$

para $j = 1, 2, \cdots$. Note que $esc_{(0)} = esc$, $esc_{(-1)} = ramp$; $esc_{(-2)} = parab$, etc.

Las relaciones (4) y (7) nos dan un conjunto completo de señales que incluyen al escalón unitario, esc, eñ impùlso unitario, δ, el doblete unitario, $\delta^{(2)}$, así como la rampa unitaria $esc_{(-1)}$, la parábola o rampa parabólica, $esc_{(-2)} = ramp$, y así sucesivamente. Si denominamos dos señales **adyacentes** a aquellas que se obtiene una por diferenciación o integración de la otra, entonces es posible entonces establecer las siguientes relaciones

$$ss_{j+1}(t) = \lim_{a \to 0} \frac{ss_j(t) - ss_j(t-a)}{a}$$

para $j \in Z$, o bien como

$$\frac{d}{dt} ss_{j-1}(t) = ss_j(t) = \int_{-\infty}^{t} ss_{j+1}(\tau)\, d\tau \tag{8}$$

con $j \in Z$, donde

$$ss_j(t) = \begin{cases} esc^{(j)}(t), & j = 0, 1, 2, \cdots \\ esc_{(j)}(t), & j = -1, -2, -3 \end{cases}$$

con tal que acordemos que (8) es el resultado de una operación de límite cuando $a \to 0$.

Las señales $ss_j(.)$ se denominan señales singulares o funciones de singularidad. Recordemos que una singularidad de una señal f es un punto $t \in T$ en el cual no existe su derivada. Cada una de las señales de singularidad (si no la señal misma, la señal diferenciada un número finito de veces) tiene un punto singular en el origen y es cero en cualquier otro instante de tiempo.

Para índice $j \in Z_{<0}$, las señales ss_j están limitadas para t finita y no necesitan símbolo especial. La figura (7) muestra la foma y las posiciones de las primeras cinco señales singulares $ss_j, j = -1, -2, -3, -4$.

tPor otro lado, las señales singulares $ss_j, j \in Z_{\geq 0}$ son realmente singulares en todo el sentido ya que ni siquiera pueden trazarse y recurrimos a las representaciones simbólicas como las que se muestrán en la figura (8).

En vista de (3) y (4), sin embargo, tenemos para $n, j \in Z_{\geq 0}$:

$$\begin{aligned} m_n(ss_j) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^n ss_j(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^n delta^{(j)}(\tau)\, d\tau \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq j, \\ (-1)^j j!, & n = j. \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

La señal generalizada $ssj(t)$ tiene un $n-$ésimo momento no-nulo y finito, mientras que los demás momentos se anulan. La proposición (9) es, de hecho, una sencilla manera en la que podríamos definir las señales singulares o de singularidad con índices no

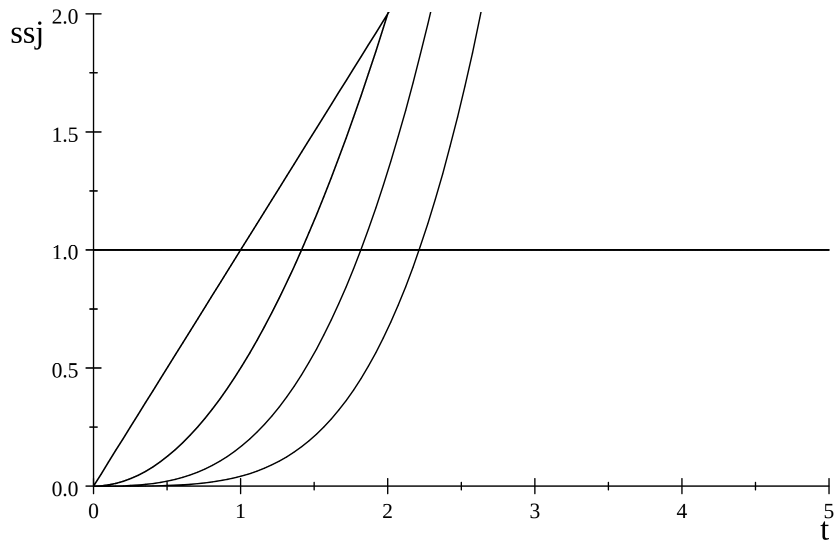


Figure 7: Caracter de las señales $ss_j, j \in Z_{<0}$

negativos (las impulsivas), siempre que tengamos presente la interpretación usual del proceso límite incluido.

Es interesante que la teoría tal como la hemos presentado, si bien es cierto nos permite enteder físicamente el significado de la señal impulso unitario y las dificultades para definirla en el contexto matemático tradicional (el de las señales continuas o seccionalmente continuas), no nos dice de una manera elemental y formal cómo podemos deducir sus propiedades y posibles extensiones a las señales de tiempo discreto (aunque como veremos en este últimno caso, no tendremos problemas matemáticos para definir las correspondientes señales generalizadas).

Por lo dicho anteriormente, es necesario dar un segundo paso en cuanto a abstracción matemática siguiendo las lineas trazadas por Temple en 1953 y Ligthill en 1955. Para aligerar el material nos limitaremos a la definición a la señal escalón unitario y su derivada generalizada el impulso unitario.

1.1 Señales Generalizadas según Temple.

Una manera de entender el método de Temple para definir las señales generalizadas es repasando cómo se aproxima un numero racional por una secuencia de números racionales.

La expansión decimal de un número irracional genera una secuencia familiar de aproximaciones racionales a ese número. Por ejemplo ya que $\pi = 3.14159...$, los números racionales

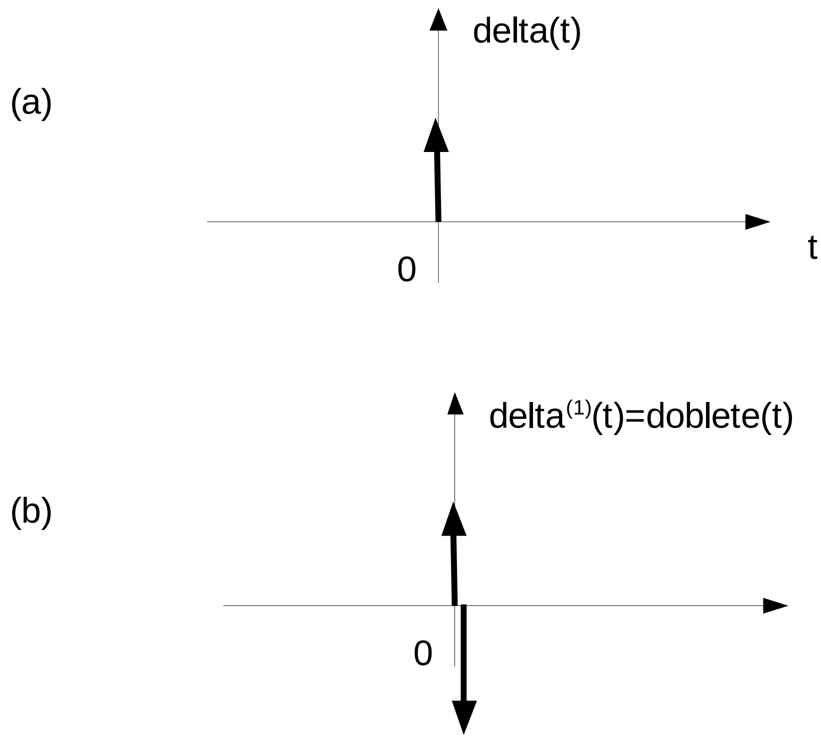


Figure 8: Símbolos para las señales desingularidad δ y $\delta^{(1)}$

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 3 \\
r1 &= 3.1 = 31/10, \\
r2 &= 3.14 = 314/1000, \\
r3 &= 3.141 = 3141/10000, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

generan una secuencia de buenas aproximaciones al número π.

De igual manera $\sqrt{2} = 1.41421...$ puede aproximarse por la secuencia de números racionales

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 1 \\
r1 &= 1.4 = 14/10, \\
r2 &= 1.41 = 141/100, \\
r3 &= 1.414 = 1414/1000, \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

con la misma precisisón como la aproximación de π.

Esto nos indica (y se puede demostrar) que dado un número irracional α (no se puede expresar como un cociente de números enteros), existe una secuencia r_n de números racionales (de ninguna manera única) tal que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} r_n$$

donde el límite indica que los puntos racioanles r_n sobre la linea real $R = (-\infty, +\infty)$ converge al punto representado por α. Es importante recordar que cuando defimos operaciones sobre dos números irracionales p, q, en realidad definimos operaciones sobre las secuencias racionales p_n y q_n que permiten definir o calcular p y q respectivamente. Por ejemplo, si $p = \lim_{n\to\infty} p_n$ y $q =$ donde $p_n, q_n \in Q, n \in Z_{\geq 0}$, entonces $p + q$ se calcula vía

$$\begin{aligned} p + q &= \lim_{n\to\infty} p_n + \lim_{n\to\infty} q_n \\ &= \lim_{n\to\infty} [p_n + q_n] \end{aligned}$$

De la misma manera, e igual como hicimos en la sección anterior, podemos concebir una señal generalizada como una secuencia de señales, las cuales cuando son multiplicadas por una señal de prueba e integrada sobre $(-\infty, +\infty)$ genera un límite finito. En consecuencia antes de definir formalmente una señal generalizada, es necesario definir las señales de prueba y las secuencias regulares.

DEFINICION 4 *Una señal ϕ de clase $C, (\phi \in C)$, es toda señal ϕ que cumple con:*

1. *ϕ es diferenciable infinitas veces en todas partes. O sea, $\phi^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n}\phi(t)$ existe para todo $t \in (-\infty, +\infty)$ y para todo n no negativo.*

2. *Para todo $m \in Z_{\geq 0}$,*

$$\lim_{|t|\to\infty} \{t^m\} \phi^{(n)}(t)$$

para todo $m, k \in Z_{\geq 0}$

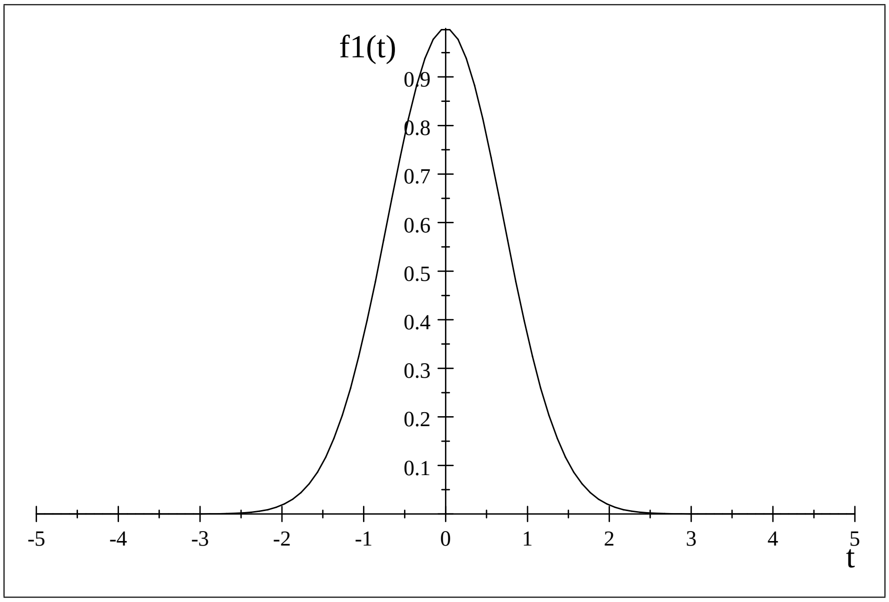
*Cualquier **función de prueba** es una señal de clase C.*

EJEMPLO 5 *La secuencia de señales Gausiana para cada $j \in Z$,*

$$f_j(t) = e^{-\frac{t^2}{j^2}}, t \in (-\infty, +\infty).$$

es infinitamente diferenciable, por ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f_j(t) &= -\frac{2}{j^2} t e^{-\left(\frac{t}{j}\right)^2} \\ \frac{d^2}{dt^2} f_j(t) &= -\frac{1}{j^4}\left(2j^2 e^{-\frac{1}{j^2}t^2} - 4t^2 e^{-\frac{1}{j^2}t^2}\right) \end{aligned}$$



etc. De las derivadas presentadas, se deduce (informalmente) que cada miembro de la secuencia es infinitamente diferenciable. Más aún recordando que para todo N entero se cumple que para cada $j \in Z_+$:

$$\lim_{|t|\to\infty} t^N e^{-\frac{t^2}{j^2}} = 0$$

Por lo tanto, para cada $j = 1, 2, 3...$

$$\begin{aligned}
\lim_{|t|\to\infty} t^N f_j(t) &= \lim_{|t|\to\infty} t^N \left[e^{-\frac{t^2}{j^2}} \right] = 0 \\
\lim_{|t|\to\infty} t^N \frac{d}{dt} f_j(t) &= \lim_{|t|\to\infty} t^N \left[-\frac{2}{j^2} t e^{-\left(\frac{t}{j}\right)^2} \right] = 0 \\
\lim_{|t|\to\infty} t^N \frac{d^2}{dt^2} f_j(t) &= \lim_{|t|\to\infty} t^N \left[-\frac{1}{j^4} \left(2j^2 e^{-\frac{1}{j^2}t^2} - 4t^2 e^{-\frac{1}{j^2}t^2} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

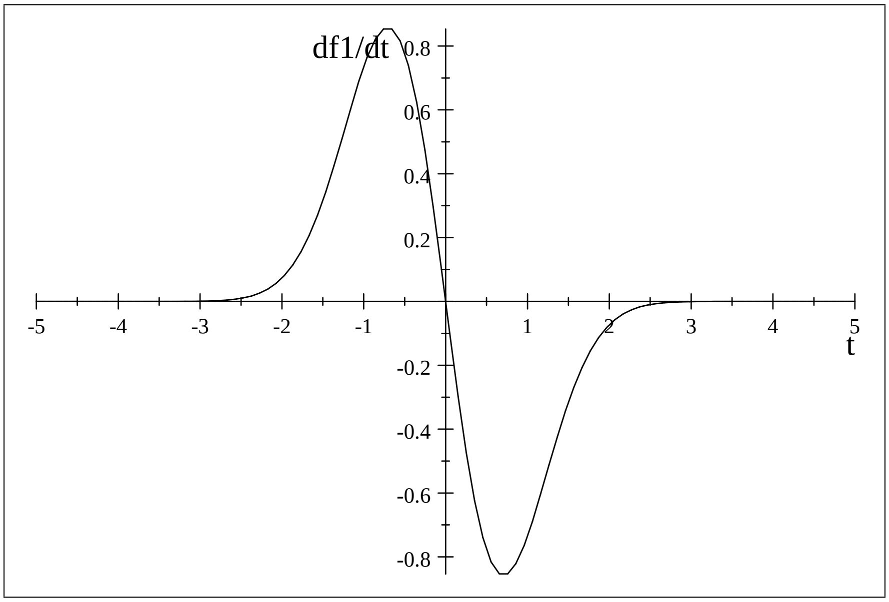
etc. Entonces la secuencia $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ de señales Gausiana son de clase C.

Es interesante ver las gráficas de f_1 y de $\frac{d}{dt} f_1$ y recordar las definiciones del impulso unitario δ y del doblete $\delta^{(1)}$ que vimos en la primera parte de estas notas.

DEFINICION 6 *Una secuencia de señales $\{f_j\}_{j \in Z_+}$ en la clase C, se dice ser* ***regular*** *si para cualquier otra señal $\phi \in C$, el límite*

$$\lim_{j\to\infty} \langle \phi, f_j \rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) f_j(\tau) \, d\tau$$

existe.



Es interesante observar que no se requiere que la secuencia converge puntualmente, o sea, en cada $t \in (-\infty, +\infty)$. Por ejemplo, considere la secuencia de clase C definida por

$$f_j(t) = \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{-jt^2}$$

De inmediato se observa que

$$\lim_{j \to +\infty} f_j(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ +\infty, & t = 0 \end{cases}$$

pero se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \lim_{j \to \infty} \langle \phi, f_j \rangle &= \lim_{j \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) f_j(\tau) \, d\tau \\ &= \lim_{j \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{-j\tau^2} d\tau \end{aligned}$$

existe y es igual $\phi(0)$, por lo tanto, la secuencia $\left\{ \sqrt{\frac{j}{\pi}} e^{-jt^2} \right\}_{j=1}^{\infty}$, $t \in R$, es regular.

DEFINICION 7 *Dos secuencias regulares* $\{f_j\}_{j \in Z_+}$ $\{g_j\}_{j \in Z_+}$ *en la clase* C *se dicen ser equivalentes, si para todo* $\phi \in C$ *se cumple que*

$$\lim_{j \to \infty} \langle \phi, f_j \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle \phi, f_j \rangle \tag{10}$$

Analicemos un poco esta definición ya que es vital para entender las dificultades y sutilezas de las señales generalizadas (y por qué son distintas a las señales ordinarias). Recuerde que dada una relación binaria $\sim$ sobre un conjunto no vacío A, o sea,

$$" \sim " \subset A \times A$$

se dice que $\sim$ es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. En otras palabras, para todos $a, b, c \in A$,

- $a \sim a$. (Reflexividad)
- Si $a \sim b$ then $b \sim a$. (Simetria)
- Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$. (Transitividad)

La **clase de equivalencia** de a (también llamada **celda**) bajo la relación de equivalencia $\sim$, denoted $[a]$, se define como

$$[a] = \{b \in A | a \sim b\}.$$

Al conjunto de todas las clases de equivalencias inducidas por la relación de equivalencia $\sim$ sobre A, se define como

$$A/\sim = \{[x] : x \in A\}$$

y se denomina el **conjunto cociente** de A con respecto a $\sim$.

y no es difícil aceptar los siguientes hechos: Si A es un conjunto sobre el cual se ha definido una relación de equivalencia $\sim$, entonces

1. Dados dos elementos cualesquieras $x, y \in A$, solo hay dos posibilidades $[x] = [y]$ o $[x] \cap [y] = \varnothing$.
2. Se cumple
$$\cup_{[x] \in A/\sim} [x] = \cup_{x \in A} [x] = A$$

EJEMPLO 8 *Las siguientes son relaciones de equivalencia:*

1. *"Es igual a" sobre el conjunto de los números reales.*
2. *"Tiene la misma fecha de cumpleaños que" sobre el conjunto de todos los estudiantes de la materia PS 2315.*
3. *"Es similar a" sobre el conjunto de todos los tríangulos en el plano.*

4. *"Es congruente a, módulo p" sobre los enteros.*

   Sea p un entero positivo dado. Dos números $m, n \in Z$, son congruentes, módulo p, $a = b(\operatorname{mod} p)$ si $m - n$ es divisible por p. Por ejemplo si $p = 2$, entonces $5 = 3 \operatorname{mod}(2)$, $-11 = 7 \operatorname{mod}(2)$. Más aun, $m = 0 \operatorname{mod}(2)$ si y solo si m es par; mientras que $m = 1 \operatorname{mod}(2)$ si y solo si m es impar. Por lo tanto,

   $$\begin{aligned} [0] &= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\} = Z_p \\ [1] &= \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\} = Z_i \end{aligned}$$

   y se cumple que $[0] \cap [1] = \varnothing$, $[0] \cup [1] == Z$

5. *"Tiene el mismo valor absoluto" sobre el conjunto de los números reales.*

6. *"Tiene el mismo coseno" sobre el conjunto de todos los números reales.*

He elaborado algo el ejemplo 4 porque ilustra, de una manera sencilla, lo que quiero que entiendan: a) las relaciones de equivalencia son lo mas parecido a la nocion de igualdad (identifican a aquellos elementos que son iguales con respecto a ciertas operaciones sobre el conjunto bajo estudio), b) Una relación de equivalencia permite simplificar de una manera estructurada al conjunto sobre el cual se ha definido (eliminando de alguna manera lo que redundante) "particionando" a este en celdas o clases de equivalencias, y extendiendo de una manera natural las operaciones definidas sobre el conjunto base a operaciones a hora sobre el conjunto cociente generado. Para ilustrar esto, usemos el ejemplo (4), donde vimos que

$$Z = Z_p \cup Z_i = [0] \cup [1]$$

Todos los pares estan en una clase equivalencia $[0]$, y los impares en $[1]$. Por lo tanto, el conjunto cociente es

$$Z/ = \operatorname{mod}(2) = \{[0], [1]\}$$

. Supongamos que definimos las operaciones de suma y multiplicación sobre Z, entonces estas operaciones se extienden a $Z/ = \operatorname{mod}(2)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} par + par &= par \\ par + impar &= impar \\ impar + par &= impar \\ impar + impar &= par \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} par.par &= par \\ par.impar &= par \\ impar.par &= par \\ impar.impar &= impar \end{aligned}$$

o mas formalmente: para todo $x, y \in Z$

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y] \\ [x] \,.\, [y] &= [x.y] \end{aligned}$$

y los resultados solo dependerán de que los elementos estén en sus respectivas clases de equivalencia pero no de ellos mismos. Esto es: Si $x_1 \in [x]$ e $y_1 \in [y]$, entonces

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x_1] + [y_1] = [x_1 + y_1] = [x + y] \\ [x] \,.\, [y] &= [x_1] \,.\, [y_1] = [x_1 . y_1] = [x.y] \end{aligned}$$

O sea:

$$\begin{aligned} [0] + [0] &= [0] \\ [0] + [1] &= [1] \\ [1] + [0] &= [1] \\ [1] + [1] &= [1] \end{aligned} \tag{11}$$

y

$$\begin{aligned} [0] \,.\, [0] &= [0] \\ [0] \,.\, [1] &= [0] \\ [1] \,.\, [0] &= [0] \\ [1] \,.\, [1] &= [1] \end{aligned} \tag{12}$$

De acuerdo a lo que hemos visto

$$\begin{aligned} [6] + [3] &= [6 + 3] = [9] \\ [0] + [1] &= [1] \end{aligned}$$

0

$$\begin{aligned} [3]\,[8] &= [24] \\ [1]\,[0] &= [0] \end{aligned}$$

Si definimos $Z_2 = Z/ = \mathrm{mod}\,(2)$, y acordamos: i) $0 \leftarrow [0]$, b) $1 \leftarrow [1]$, entonces de inmediato tenemos $Z_2 = \{0, 1\}$ y las operaciones de suma y multiplicación sobre Z_2 están dadas por

$$\begin{array}{c} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 1 = 1 \\ 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 = 0 \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{c} 0.0 = 0 \\ 0.1 = 0 \\ 1.0 = 0 \\ 1.1 = 0 \end{array} \tag{13}$$

O sea, en Z_2 el "elemento cero" representa mediante el cero de Z a la clase de equivalencia Z_2 $(0 \in Z_2)$ y "el elemento 1" representa mediante el 1 de Z a la clase de equivalencia Z_i $(1 \in Z_i)$, y que las operaciones de suma y multiplicación (13) en realidad es una manera simbólica de representar las verdaderas operaciones de suma y multiplciación mostradas en (11) y (12) respectivamente.

Volviendo ahora a la definición de señales regulares equivalentes, notamos que lo hemos hecho es definir una relación binaria $\sim$ sobre el conjunto de todas las secuencias regulares en la clase C. Esto es, si

$$regC^N = \left\{ \{f_i\}_{i=1}^{\infty} \in C^N : \{f_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ es regular} \right\}$$

entonces $\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \sim \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ si y solamente si para toda $\phi \in C$,

$$\lim_{j\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\, f_j(\tau)\, d\tau = \lim_{j\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\, g_j(\tau)\, d\tau$$

Al igual que en $Z_2 = Z/ = \operatorname{mod}(2)$, podemos acordar que a una clase de equivalencia $[\{f_i\}_{i=1}^{\infty}]$ la representamos por la señal $\mathbf{f}$, mientras que a otra secuencia $[\{g_i\}_{i=1}^{\infty}]$ la denotamos la letra $\mathbf{g}$, y podemos definir la suma y multiplicación de esas clases de equivalencia como

$$\begin{aligned} \mathbf{f} + \mathbf{g} &= [\{f_i\}_{i=1}^{\infty}] + [\{g_i\}_{i=1}^{\infty}] \\ &= [\{f_i\}_{i=1}^{\infty} + \{g_i\}_{i=1}^{\infty}] = [\{f_i + g_i\}_{i=1}^{\infty}] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{f}.\mathbf{g} &= [\{f_i\}_{i=1}^{\infty}] \cdot [\{g_i\}_{i=1}^{\infty}] \\ &= [\{f_i\}_{i=1}^{\infty} \cdot \{g_i\}_{i=1}^{\infty}] = [\{f_i . g_i\}_{i=1}^{\infty}] \end{aligned}$$

Ahora estamos listos para definir formalmente a una señal generalizada.

DEFINICION 9 *Una señal generalizada* $\mathbf{f}$ *se define como una clase completa o total de señales regulares equivalentes,* $[\{f_i\}_{i=1}^{\infty}]$ *(10). Donde el término "total o completa" significa que no existe una secuencia de señales regulares* $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \notin g$*, equivalente a una* $\{g_i\}_{i=1}^{\infty} \in g$*. Y denote por* Sg *al conjutno de todas las señales generalizadas sobre la clase* C*.*

Tal como hemos visto en otros ejemplso, cualquier miembro de la clase $\mathbf{f}$, por ejemplo, $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ es suficiente para representar tanto a $\mathbf{f}$ como a la clase total de señales regulares equivalentes a $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. Podemos convenir entonces que una señal generalizada $\mathbf{f}$ es $\mathbf{f} = [\{f_i\}_{i=1}^{\infty}]$ o $\mathbf{f} \sim \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$. En consecuencia, debemos interpretar $\langle \mathbf{f}, \phi \rangle$ para toda $\phi \in C$, como

$$\langle \mathbf{f}, \phi \rangle := \lim_{i\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\, f_i(\tau)\, d\tau$$

De hecho, es usual encontrar que el producto interno $\langle \mathbf{f},\phi\rangle$ se representa simbólicamente como

$$\langle \mathbf{f},\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,\mathbf{f}(\tau)\,d\tau$$

pero debemos estar claro que no realizamos ninguna integración sino que

$$\langle \mathbf{f},\phi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,\mathbf{f}(\tau)\,d\tau := \lim_{i\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\, f_i(\tau)\,d\tau$$

DEFINICION 10 *Dadas dos señales generalizadas* $\mathbf{f}.= [\{f_i\}_{i=1}^{\infty}]$ *y* $\mathbf{g} = [\{g_i\}_{i=1}^{\infty}]$ *en* S_g*, entonces definimos las siguientes operaciones sobre* S_g *:*

1. *(Suma)* $\mathbf{f}+\mathbf{g} = [\{f_i+g_i\}_{i=1}^{\infty}]$ *o* $\mathbf{f}+\mathbf{g} \sim \{f_i+g_i\}_{i=1}^{\infty}$ *.*
2. *(Multiplicación escalar) Para todo* $\alpha \in R$, $\alpha\mathbf{f} = [\{\alpha f_i\}_{i=1}^{\infty}]$ *od* $\alpha\mathbf{f} \sim \{\alpha f_i\}_{i=1}^{\infty}$
3. *(Derivada)* $Df = f'$*, con* $D\mathbf{f} = \frac{d}{dt}\mathbf{f}$, $\mathbf{f}' = [\{Df_i\}_{i=1}^{\infty}]$ *o* $\mathbf{f}' \sim \left\{\frac{d}{dt}f_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ *.*

EJEMPLO 11 *Para la señal generalizada* $\mathbf{f} \sim \left\{e^{-\frac{t^2}{j^2}}\right\}_{j=1}^{\infty}$*, la señal generalizada " derivada de* $\mathbf{f}$ *" es*

$$\mathbf{f}' \sim \left\{-\frac{2t}{j^2}e^{-\frac{t^2}{j^2}}\right\}_{j=1}^{\infty}$$

y para cualquier $\phi \in C$*, se tiene*

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{f},\phi\rangle &= = \lim_{i\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\, f_i(\tau)\,d\tau \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\left\{-\frac{2t}{j^2}e^{-\frac{t^2}{j^2}}\right\}d\tau\end{aligned}$$

Debemos resaltar que aunque en Z_2 definimos la multiplicación de las clases de equivalencia $[0]$ y $[1]$, en el conjunto S_g de señales generalizadas, la multiplicación de dos señales generalizadas $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ no está definida en general.

A continuación, preesentamos un resultado importante ya que nos permitirá representar una señal ordinaria (con la que trabajamos generalmente y sin muchos problemas matemáticos), como la función escalón, mediante una señal generalizada.

TEOREMA 12 *Dada una señal ordinaria de tiempo continuo* $f \in S_e$ *que satisfaga la condición*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(\tau)|}{(1+\tau^2)^N}\,d\tau < \infty$$

para algún $N \geq 0$, *existe una señal generalizada* $\mathbf{f} \sim \{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *tal que para toda* $\phi \in C$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f},\phi \rangle &= \lim_{i\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) f_i(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) f(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Donde el producto interno $\langle f,\phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) f(\tau) d\tau$ *es el actual proceso de integración. Y simbólicamente, se escribe* $f = \mathbf{f}$*. Si ademas la señal es continua en un intervalo* $T_1 \subset R$*, entonces se tiene que para cada* $t \in T_1$,

$$\lim_{j\to\infty} f_n(t) = f(t)$$

Más aún, se puede demostrar que todas las operaciones de suma, producto escalr y difercnciación realziadas sobre la señal ordinaria f y sobre su extención a señal generalizada $\mathbf{f}$ generan iguales resultados, esto es, para todos escalares $\alpha, \beta \in R$, $f, g \in S_e$ que satisfacen la condición del teorema, y $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in S_g$ las respectivas extensiones en S_e, se tiene

$$(\alpha f + \beta g)' = (\alpha \mathbf{f} + \beta \mathbf{g})'$$

cuando la diferenciación de las respectivas señales ordinarias estén bien definidas.

DEFINICION 13 *Señal generalizada escalón unitario* **esc** *se define como la clase total de secuencias equivalentes* $\{esc_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ *tal que para toda* $\phi \in C$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{esc},\phi \rangle &= \lim_{i\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) esc_i(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) esc(\tau) d\tau \\ &= \int_{0}^{+\infty} \phi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

donde

$$esc(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

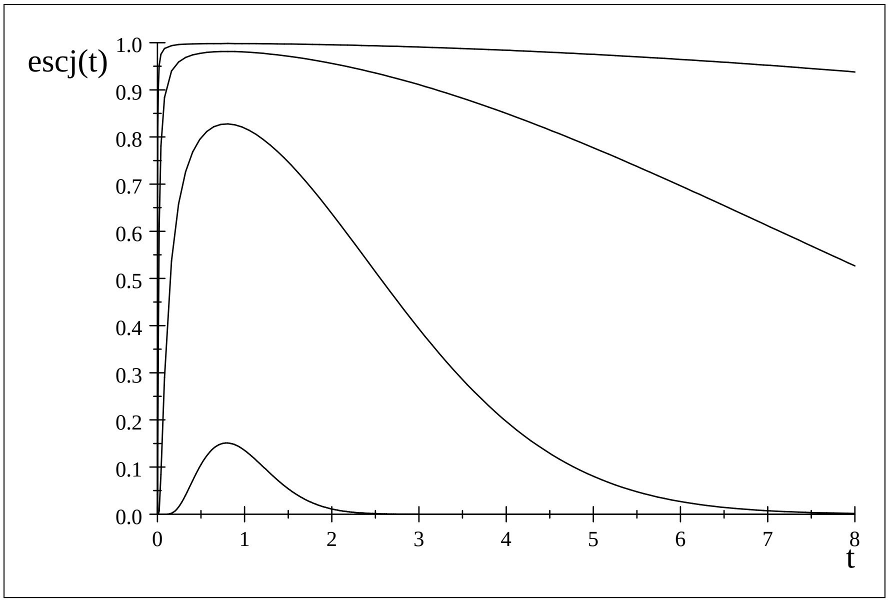
Tal secuencia $\{esc_j\}_{j=1}^{\infty}$ existe debido al teorema anterior que permite representar una señal ordinaria mediante una señal generalizada. En consecuencia, escribiremos $esc = \mathbf{esc}$.

EJEMPLO 14 *La secuencia*

$$esc_j(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{j}\left(\frac{k}{t}+t^2\right)}, & t > 0 \\ 0, & 0 \leq t. \end{cases}$$

es un miembro de la clase de secuencias regulares equivalentes que representan la señal generalizada escalón unitario y las cuales se muestrna en la figura (1.1).

$e^{-\frac{1}{j}\left(\frac{k}{t}+t^2\right)}$



la secuencia generalizada escalón unitario

DEFINICION 15 *El impulso unitario de tiempo continuo $\delta(t)$ se define como la derivada de ka señal generalizada escalón unitario. Esto es*

$$\boldsymbol{\delta}(t) \sim \left\{\frac{d}{dt} esc_j\right\}_{j=1}^{\infty}.$$

Una vez más debemos enfatizar que δ no es una función ordinaria sino una señal generalizada, o sea, la clase de equivalencia total de las secuencias regulares representadas por $\left\{\frac{d}{dt} esc_j\right\}_{j=1}^{\infty}$. En consecuencia, cuando escribimos para $\phi \in C$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau$$

queremos decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \langle \delta, \phi \rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)\,D\left[esc_j(\tau)\right]d\tau$$

donde $D = \frac{d}{dt}$ es el operador derivada.

EJEMPLO 16 *La secuencia regular*

$$D\left[esc_j\right](t) = \begin{cases} \left(\frac{k}{t^2} - 2t\right) e^{-\frac{1}{j}\left(\frac{k}{t}+t^2\right)}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

es un miembro de la clase de secuencias regulares, equivalentes que representan la señal generalizada impulso unitario. Otros miembros de dicha clase son las ecuencisa regurales

$$\left\{ \sqrt{\tfrac{j}{\pi}} e^{-jt^2} \right\}_{j=1}^{\infty} \quad y \quad \left\{ \tfrac{1}{\sqrt{2\pi j}} e^{-\frac{t^2}{2j^2}} \right\}_{j=1}^{\infty}$$

1.1.1 Propiedades del Impulso Unitario

Cada una de las propiedades de la señal generalizada impulso unitario, trataremos de motivarlas empleando argumentos familiares a los estudiantes de ingeniería.

Propiedad de Tamizado Suponga que se tiene un a señal $f \in S_e$, tiempo continuo

$T = (-\infty, +\infty)$ y se quiere calcular

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{a} \Pi_a(\tau) \, d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \left\{ \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \Pi_a(\tau) \right\} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \, \delta(\tau) \, d\tau \end{aligned}$$

El producto $f(\tau) \frac{1}{a} \Pi_a(\tau)$ y su resultado se muestra en la figura (**??**)

En consecuencia

$$\begin{aligned} \lim_{a \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \frac{1}{a} \Pi_a(\tau) \, d\tau &= \lim_{a \to 0} \int_{-a/2}^{+a/2} f(\tau) \frac{1}{a} \Pi_a(\tau) \, d\tau \\ &= \lim_{a \to 0} \int_{-a/2}^{+a/2} f(\tau) \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \Pi_a(\tau) \, d\tau \\ &= \int_{0^-}^{0^+} f(0) \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \Pi_a(\tau) \, d\tau \\ &= \int_{0^-}^{0^+} f(0) \, \delta(\tau) \, d\tau = f(0) \underbrace{\int_{0^-}^{0^+} \delta(\tau) \, d\tau}_{1} \\ &= f(0) \end{aligned}$$

y por lo tanto, postulamos que debería ser cierto que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \, \delta(\tau) \, d\tau = f(0)$$

TEOREMA 17 *(Propiedad de Tamizado) Dada una señal diferenciable f sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$, entonces*

$$\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau) \, \delta(\tau) \, d\tau = f(0);$$

con $|\alpha|, |\beta| < \infty$. *(Recuerde que el lado izquierdo de la igualdad debe interpretarse como*

$$\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \lim_{j\to\infty}\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau)\left[Desc_j(\tau)\right]d\tau$$

donde $D = \frac{d}{dt}$ *y* $\delta \sim \left\{esc_j'\right\}_{j=1}^{\infty}$ *.)*

DEMOSTRACION. *La demostración no es más que una aplicación conjunta de la toma de límites y de la técnica de integración por partes:*

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\int_{\alpha<0}^{\beta>0} \underbrace{f(\tau)}_{u}\underbrace{\left[Desc_j(\tau)\right]d\tau}_{dv} &= f(\tau)\lim_{j\to\infty} esc_j(t)\Big|_{t=\alpha}^{\beta} - \lim_{j\to\infty}\int_{\alpha<0}^{\beta>0} esc_j(\tau)\,.Df(\tau)\,d\tau \\
&= f(\beta) - \int_{\alpha<0}^{\beta>0}\lim_{j\to\infty} esc_j(\tau)\,Df(\tau)\,d\tau \\
&= f(\beta) - \int_{\alpha<0}^{\beta>0} esc(\tau)\,Df(\tau)\,d\tau \\
&= f(\beta) - \int_{0}^{\beta>0} Df(\tau)\,d\tau = f(\beta) - \left\{ f(t)|_{t=0}^{\beta}\right\} \\
&= f(\beta) - \{f(\beta) - f(0)\} \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

■

Note que cuando los límites de integración son infinitos, queremos en realidad decir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = f(0)\,.$$

En la propiedad de tamizado, si ambos $\alpha, \beta > 0$ o $\alpha, \beta < 0$, entonces

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = 0$$

y su desmostración es similar a la presentada en el teorema.

Propiedad de Integración Las ecuaciones que inicialmente empleó Dirac para definir el impulso unitario son

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha<0}^{\beta>0} \delta(\tau)\,d\tau &= 1 \\
\delta(t) &= 0, t \neq 0
\end{aligned}$$

Sin embargo, estas relaciones son en realidad propiedades de la señal generalizada impulso unitario que pueden deducirse del teorema de tamizado tal como mostramos a continaución.

Supongamos que se tiene la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = f(0)$$

y de inmediato al tomar una señal $f(t) = 1$, para todo $t \in (-\infty, +\infty)$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)\,d\tau = 1$$

Por otro lado, si ambos $\alpha, \beta > 0$ o $\alpha, \beta < 0$, entonces

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(\tau)\,d\tau = 0$$

la cual simbólicamente se repesenta por las condiciones $\delta(t) = 0, t \neq 0$.

Diferenciación en un punto de discontinuidad Considere la señal f mostrada en la figura (**??**)

Note que la señal f tiene una discontinuidad (simple) en $t = h$ de altura $-a$, esto es:

$$f\left(h^{+}\right) - f\left(h^{-}\right) = F + a - F = -a$$

Si definimos

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t < h, \\ f(t) + a, & t \geq h \end{cases}$$

Entonces, vemos que $f_1(t)$ es una señal continua derivable de tiempo continuo y

$$f(t) = f_1(t) - a.esc\,(t - h)$$

y como cada una de las señales ordinarias f, f_1 y esc cumplen con la condición

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|g(\tau)|}{(1+\tau^2)^N} d\tau < \infty$$

paa algún N, podemos erpresentar estas señales ordinarias por sus respectivas extensiones como señales generalizadas

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_1(t) - a.\mathbf{esc}\,(t - h)$$

y tomando derivadas en ambos lados (como señales generalizadas)

$$D\mathbf{f}(t) = D\mathbf{f}_1(t) - a.D\mathbf{esc}\,(t - h)$$

La cual simbolicamente puede representarse como

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} f_1(t) - a.\delta(t - h)$$

En conseceuncia, cada vez que diferenciemos una señal en una discontinuidad (simple) se genera una señal impulso ya no unitario pero de altura iagual a la de la discontinuidad (alerta con el signo adecuado).

Diferenciación En la introducción de estas notas, encontramos que la derivada (informal) de un impulso unitario es un doblete (ver (4)). Ahora bien denotemos esta señal generalizada por $\delta^{(1)}(t) \sim \left\{ \frac{d^2}{dt^2} esc_j \right\}_{j=1}^{\infty}$. Dicha señal tiene la siguiente propiedad:

TEOREMA 18 *Para toda señal f tal que $D^2 f = \frac{d^2}{dt^2} f = f^{(2)}$ existe sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$, se cumple*

$$\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau)\, \delta^{(1)}(\tau)\, d\tau = -f^{(1)}(0)$$

DEMOSTRACION. *Por definición*

$$\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau)\, \delta^{(1)}(\tau)\, d\tau = \lim_{j\to\infty} \int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau)\, D^2 (esc_j(\tau))\, d\tau$$

donde $D = \frac{d}{dt}$. E integrando por partes

$$\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau)\, D^2 (esc_j(\tau))\, d\tau = \left[\lim_{j\to\infty} Desc_j(t) \right] .f(t) \Big|_{t=\alpha<0}^{\beta>0} - \lim_{j\to\infty} \int_{\alpha<0}^{\beta>0} f^{(1)}(\tau)\, D(esc_j(\tau))\, d\tau$$

y como

$$\lim_{j\to\infty} Desc_j(\beta) = \lim_{j\to\infty} Desc_j(\alpha) = 0$$

se tiene que

$$\left[\lim_{j\to\infty} Desc_j(t) \right] .f(t) \Big|_{t=\alpha<0}^{\beta>0} = 0$$

y por lo tanto

$$\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau)\, D^2 (esc_j(\tau))\, d\tau = -\lim_{j\to\infty} \int_{\alpha<0}^{\beta>0} f^{(1)}(\tau)\, D(esc_j(\tau))\, d\tau$$

e integrando nuevamente por partes

$$\begin{aligned}
-\lim_{j\to\infty} \int_{\alpha<0}^{\beta>0} f^{(1)}(\tau)\, D(esc_j(\tau))\, d\tau &= -\left\{ \lim_{j\to\infty} esc_j(t) \right\} f^{(1)}(t) \Big|_{t=\alpha<0}^{\beta>0} + \lim_{j\to\infty} \int_{\alpha<0}^{\beta>0} f^{(2)}(\tau)\, esc_j(\tau)\, d\tau \\
&= -\left\{ \lim_{j\to\infty} esc_j(\beta)\, f^{(1)}(\beta) - \lim_{j\to\infty} esc_j(\alpha)\, f^{(1)}(\alpha) \right\} \\
&\quad + \int_{\alpha<0}^{\beta>0} f^{(2)}(\tau) \lim_{j\to\infty} esc_j(\tau)\, d\tau \\
&= -f^{(1)}(\beta) + \int_{\alpha<0}^{\beta>0} f^{(2)}(\tau)\, esc(\tau)\, d\tau \\
&= -f^{(1)}(\beta) + \int_{0}^{\beta>0} f^{(2)}(\tau)\, d\tau \\
&= -f^{(1)}(\beta) + \left\{ f^{(1)}(t) \right\} \Big|_{t=0}^{\beta>0} = -f^{(1)}(\beta) + f^{(1)}(\beta) - f^{(1)}(0) \\
&= -f^{(1)}(0)
\end{aligned}$$

O sea

$$
\begin{aligned}
\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau) D^2 (esc_j(\tau)) \, d\tau &= -\lim_{j\to\infty} \int_{\alpha<0}^{\beta>0} f^{(1)}(\tau) D(esc_j(\tau)) \, d\tau \\
\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau) \delta^{(1)}(\tau) \, d\tau &= -f^{(1)}(0)
\end{aligned}
$$

■

Finalmente, usando inducción matemática no es difícil demostrar que para todo $n \in Nat$ (conjunto de los naturales)

$$
\int_{\alpha<0}^{\beta>0} f(\tau) \delta^{(n)}(\tau - h) \, d\tau = (-1)^n f^{(n)}(h)
$$

donde hemos supuesto que $D^n f = f^{(n)}$ existe sobre $[\alpha, \beta]$.

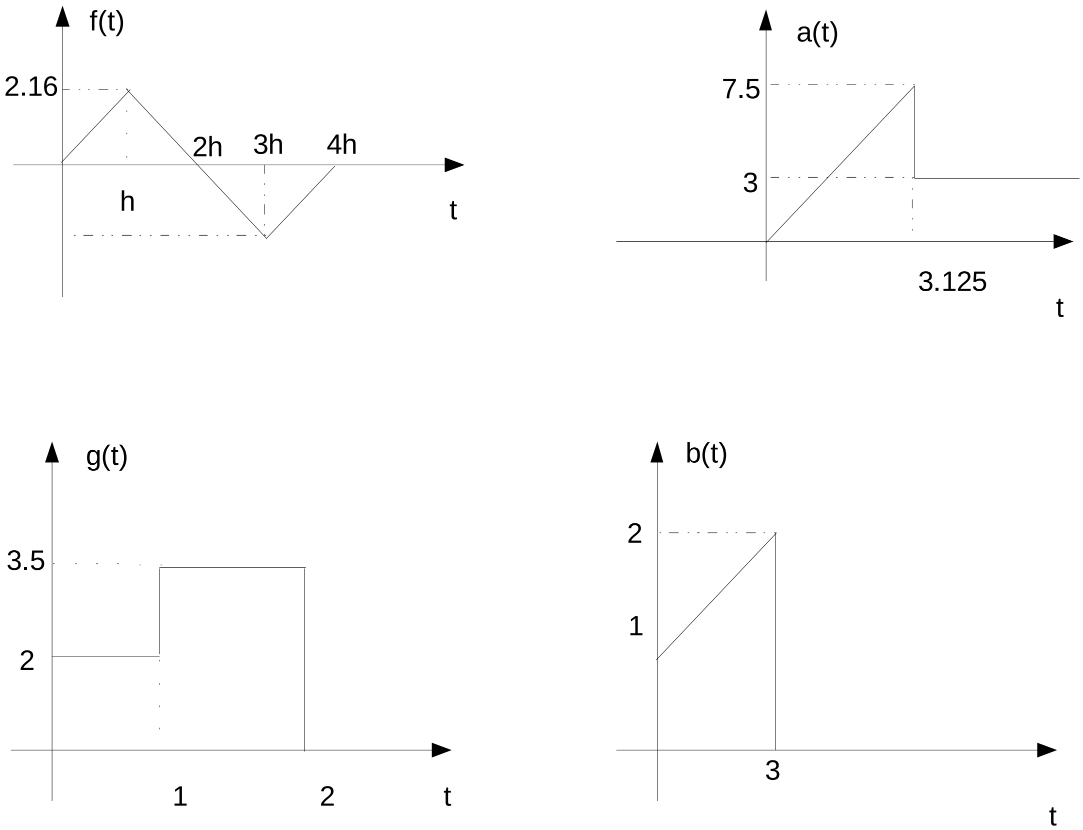
Otras propiedades del impulso unitario Dirac y otros han demostrado un buen catálogo de propiedades de la señal impulso unitario de tiempo continuo. A continuación se presentan sin demostración alguna de ellas.

TEOREMA 19 (propiedades) *La señal impulso unitario δ de tiempo continuo cumple con:*

1. $\delta(-t) = \delta(t)$
2. $\delta^{(1)}(-t) = -\delta^{(1)}(t)$
3. $t\delta(t) = 0$
4. $t\delta^{(1)}(t) = -\delta(t)$
5. $\delta(ht) = \frac{1}{|h|}\delta(t)$
6. $\delta(t^2 - h^2) = \frac{1}{2|h|}\{\delta(t-h) + \delta(t+h)\}$
7. $f(t)\delta(t-h) = f(h)\delta(t-h)$

1.2 Ejercicios

EJERCICIO 20 *Encuentre la derivada de señales que se muestran en la figura (20) y ecriba las ecuaciones para las derivadas empleando señales impulso y escalón desplazadas temporalmente.*



EJERCICIO 21 *Para las señales mostradas en la figura (9), determine y dibuje cuidadosamente*

$$\int_{-\infty}^{t} \phi(\tau)\, d\tau$$

EJERCICIO 22 *Para la señal $f(t)$ mostrada en el ejercicio anterior, suponga que la señal impulso es $-K\delta(t-3)$, $K > 0$ y $t \in (-\infty, +\infty)$, determine el valor de k tal que:*

1. *l a integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau = 0$$

2. *la integral*

$$\int_{0^+}^{+\infty} f(\tau)\, d\tau = 0$$

EJERCICIO 23 *Demuestre que*

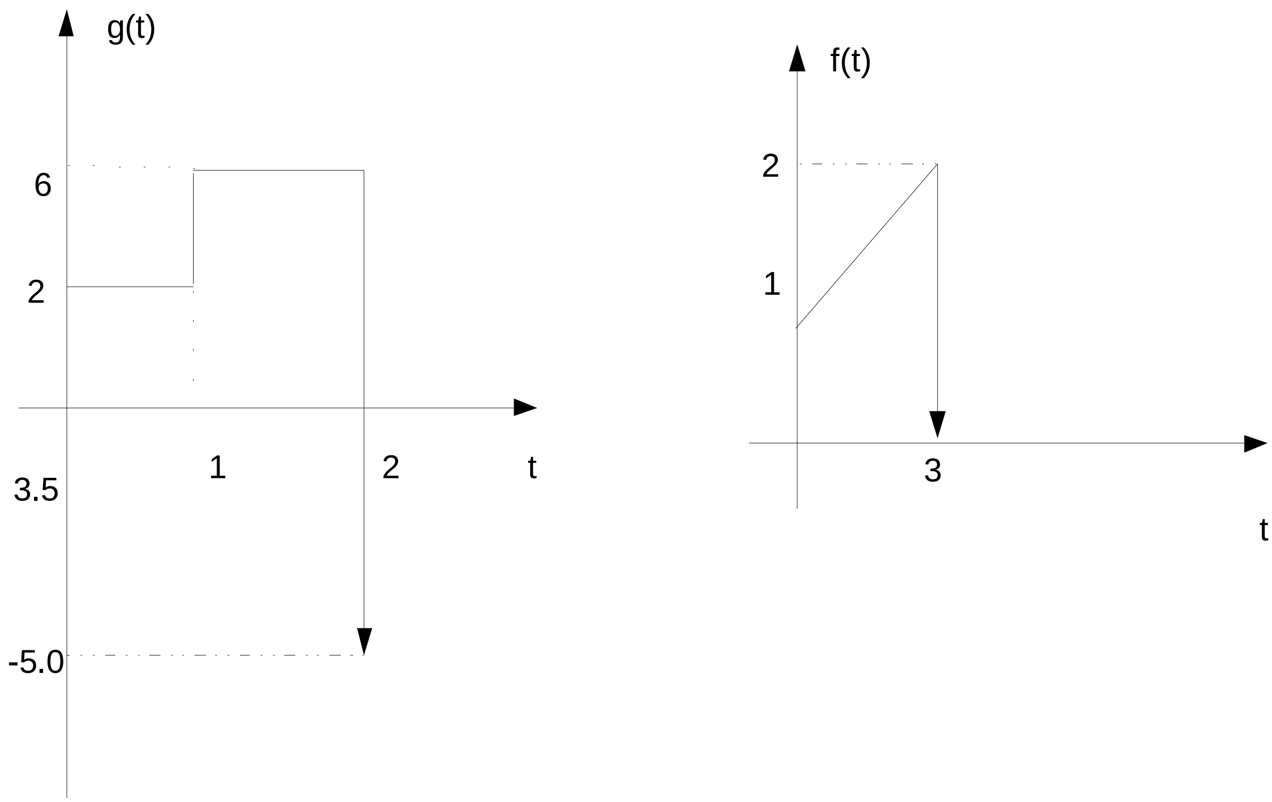


Figure 9: Señales impulsivas

1. *Para todo* $t \in (-\infty, +\infty)$:

$$\delta^{(1)}(t) = -\delta^{(1)}(-t)$$

2. *Para todo* $t \in (-\infty, +\infty)$:

$$-\delta(t) = t\delta^{(1)}(t)$$

3. *Para todo* $t \in (-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau\delta(\tau)\, d\tau = 0$$

EJERCICIO 24 *Dibuje empleando Scilab las señales*

$$\zeta(t) = \delta(\cos(t))$$

$t \in (-\infty, +\infty)$, *y la señal*

$$\phi(t) = sign(\cos t)$$

donde

$$sign\left(t\right)=\begin{cases} 1, & t>0,\\ 0, & t=0,\\ -1, & t<0.\end{cases}$$

y $t\in 0,2\pi)$.

EJERCICIO 25 *Evalúe las siguientes integrales*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\tau-h_1\right)esc\left(\tau-h_2\right)d\tau$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\omega_0\right)\cos\left(\omega t\right)d\omega$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\delta\left(\tau\right)-A\delta\left(\tau-h_1\right)+2A\delta\left(\tau-h_2\right)\right]e^{-jn\omega\tau}d\tau$$

EJERCICIO 26 *Evalúe la siguiente integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\left(\tau\right)\left[\delta\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right)+\delta^{(1)}\left(\tau-\frac{\pi}{2}\right)+\delta^{(2)}\left(\tau-\pi\right)\right]d\tau$$

EJERCICIO 27 *Demuestre cada una de las propiedades postuladas en el teorema()*

S

2 Apéndice

2.1 Señales Generalizadas y Distribuciones según Schwartz.

La teoría que trata sobre el conjunto de señales generalizadas se denomina teoría de distribuciones y depende fuertemente de conceptos del álgebra lineal.

DEFINICION 28 *(Funcionales lineales) Sea X un espacio lineal sobre el cuerpo de los números complejos. Una* ***funcional lineal*** *f de X es una función*

$$f:X\rightarrow R$$

tal que

$$f\left(\alpha x+\beta y\right)=\alpha f\left(x\right)+\beta f\left(y\right)$$

para todo $x,y\in X,\alpha,\beta\in C$.

A continuación se presenta una serie de ejemplos de funcionales lineales.

EJEMPLO 29 *a) Sea $L_\infty[a,b)$ el espacio de todas las señales acotadas en $[a,b)$. Para cada $f \in L_\infty[a,b)$ defina*

$$ni : L_\infty[a,b) \to R : f \longmapsto ni\,(f) = \sup_{t\in[a,b)} |f\,(t)|$$

entonces ni es una funcional lineal.

Específicamente si

$$f\,(t) = -3.3\ esc\,(t)\,, t \in (-\infty, +\infty)$$

entonces

$$ni\,(f) = 3.3$$

o si

$$g\,(t) = \sqrt{3}e^{-3t}\cos(2\pi t)\,esc\,(t)$$

entonces$\sqrt{3}$

$$ni\,(g) = \sqrt{3}$$

b) Defina sobre $X = C^n$ la función

$$f : C^n \to R : x \longmapsto f\,(x) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i x_i|$$

para un conjunto dado de números complejos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Entonces f es una funcional lineal.

Por ejemplo si $n = 3$, y $\alpha_1 = 1 + j, \alpha_2 = 1 - j$, $\alpha_3 = 2$, y $x = (1, -2, j)$ donde $j = \sqrt{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} f\,(x) &= |(1+j)\,1| + |(1-j)\,2| + |2j| \\ &= 3\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

Las funciones generalizadas se describen a través de funcionales lineales sobre el conjunto de funciones de prueba.

DEFINICION 30 *(Conjunto de funciones de prueba) El **conjunto de funciones de prueba** $\mathcal{D}$ consiste en todas las funciones con soporte compacto y son infinitamente diferenciables..*

Recuerde que:

1. Dada una señal $f \in A^{\mathcal{T}}$, se define como su soporte al conjunto.

$$soprt\,(f) = \overline{\{t \in \mathcal{T} : f\,(t) \neq 0\}}$$

   donde $\overline{(.)}$ representa la operación de adherencia.

2. $\mathcal{D}$ es un espacio lineal sobre el cuerpo C.

3. Por otro lado, considere una aplicación $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ donde $\mathcal{U} \subset R^m$ es un conjunto abierto con respecto a la métrica $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2}$ y $\mathcal{V} \subset R$ es un conjunto abierto con respecto a la métrica d_1. Se dice que la aplicación ϕ es $k-$veces diferenciable de clase $\mathcal{C}^k$ y se escribe $\phi \in \mathcal{C}^k(\mathcal{U})$, si ϕ tiene derivadas parciales continuas de orden k. Esto quiere decir que para cada $q \in \underline{m}$, $j \in \underline{k}$ las derivadas
$$\frac{\partial^j}{\partial^j u_q} \phi(u_{1,} \cdots, u_m)$$
para todo $(u_{1,} \cdots, u_m) \in \mathcal{U}$, existen y son continuas. De cumplirse dicha condición para $k = \infty$, se dice que la aplicación ϕ es "suave" y cuando $k = 1$ la aplicación se dice ser diferenciable.

   En caso de que el conjunto $\mathcal{U}$ no sea abierto en R^n, se dice que ϕ es suave sobre U si existe un conjunto abierto $\mathcal{U}^*$ que contiene a $\mathcal{U}$, y una función suave $\phi^* : U^* \to \mathcal{V}$ tal que $\phi^*|_{\mathcal{U}} = \phi$.

   Dada una función $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ diferenciable, se define el gradiente de ϕ en $u_0 \in \mathcal{U}$, al vector
$$J_u(\phi)|_{u_0} = \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \phi(u) \bigg|_{u=u_0}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u_m} \phi(u) \bigg|_{u=u_0} \right]_{(1 \times m)}$$
y la cual es continua con respecto a u_0. es el gradiente de $\phi = \phi_1$.

   Observe que el gradiente $J_u(\phi)|_{u_0}$en un punto u_0 puede interpretarse como una transformación lineal
$$J_u(\phi)|_{u_0} : R^m \to R$$
que es la diferencial de ϕ en u_0 con respecto a las bases estándares de R^m y R.

   Es posible demostrar el siguiente resultado:

PROPOSICION 31 *Una aplicación $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ es diferenciable si, y solo si existe una función continua $J^* : \mathcal{U} \to R^{1\times m}$ tal que para cada $u_0 \in \mathcal{U}$,*
$$\lim_{u \to u_0} \frac{\|\phi(u) - \phi(u_0) - J^*(u_0)(u - u_0)\|}{\|u - u_0\|} = 0$$
donde $\|u\| = \|u\|_2$.

Si tal J^* existe, entonces necesariamente $J^*(u_0) = J_u(\phi)|_{u_0}$.

EJEMPLO 32 *Una función de prueba $\phi \in \mathcal{D}$ está dada por*
$$\phi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$$

Sea $\mathcal{D}_K$ el espacio lineal de todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte en el conjunto compacto K. (Recuerde que en R^n, un conjunto A es compacto si y solo si es cerrado y acotado)

DEFINICION 33 *(Distribución) Una* ***distribución*** $\mathbf{f}$ *es una funcional lineal sobre el conjunto de las funciones de prueba* $\mathcal{D}$ *tal que cumple con la siguiente propiedad de continuidad: "Para cada conjunto compacto* K*, la restricción de* $\mathbf{f}$ *a* $\mathcal{D}_K$ *es una funcional lineal continua.*

Un ejemplo evidente de distribución es la funcional $\mathbf{f} : D \to R$ dada por

$$\mathbf{f}(\phi) = \int_a^b \phi(t)\, dt \tag{14}$$

con $a, b \in R$ números dados.

DEFINICION 34 *(Distribución delta) La funcional lineal* $\boldsymbol{\delta}$ *sobre* $\mathcal{D}$*, definida por*

$$\delta(\phi) = \phi(0)$$

es una distribución denominada la ***distribución delta****.*

Observe que la distribución delta se diferencia en su estructura de la distribución (14) del ejemplo dado , ya que esta última es de la forma

$$\mathbf{f}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \phi(t)\, dt$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}$ y donde la función f está dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1 & a \leq t < b, \\ 0, & t \notin [a, b) \end{cases}$$

Note que la distribución delta no se puede expresar de esta manera.

DEFINICION 35 *(Distribuciones regulares y singulares) Una distribución* $\mathbf{f}$ *se dice ser regular si existe una función* $f \in L(-\infty, \infty)$ *tal que*

$$\mathbf{f}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \phi(t)\, dt \tag{15}$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}$*. De lo contrario se dice que* $\mathbf{f}$ *es singular. Si* $\mathbf{f}$ *es regular, entonces se dice que la función regular* $f \in L(-\infty, \infty)$ *representa la distribución.*

Aunque una distribución $\mathbf{f}$ no sea regular, generalmente se expresa simbólicamente como una integral de la forma (15) y se llama función singular a la función f que forma parte de la integral. El conjunto de funciones generalizadas está constituida por las señales regulares y las singulares.

Por lo dicho arriba, a la distribución delta se representa simbólicamente mediante

$$\boldsymbol{\delta}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \phi(t)\, dt = \phi(0) \tag{16}$$

que es la manera en que tradicionalmente se define la función delta.

La aplicación de la distribución $\boldsymbol{\delta}$ no está limitada a funciones de prueba, y de hecho solo se exige que la función ϕ sea continua en 0. Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\delta}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \phi(t)\, dt = \phi(0)$$

para $\phi \in L(-\infty, \infty)$ que es continua en 0.

2.1.1 Operaciones básicas de distribuciones

Al igual que en el estudio de señales regulares, resulta necesario definir operaciones unarias y binarias sobre el conjunto de todas las distribuciones.

DEFINICION 36 *(Igualdad de distribuciones) Dos distribuciones* $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ *se dicen ser iguales si para toda* $\phi \in D$ *se cumple*

$$\mathbf{f}(\phi) = \mathbf{g}(\phi)$$

El primer objetivo consiste en definir la suma de distribuciones y la multiplicación de una distribución por un escalar, convirtiendo así al conjunto de todas las posibles distribuciones en un espacio lineal.

DEFINICION 37 *(Suma y multiplicación por un escalar) Si* $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ *son distribuciones entonces se definen las operaciones de suma y multiplicación por un escalar* $\alpha \in C$ *mediante*

$$\begin{aligned} (\mathbf{f} + \mathbf{g})(\phi) &= \mathbf{f}(\phi) + \mathbf{g}(\phi) \\ (\alpha \mathbf{f})(\phi) &= \alpha \mathbf{f}(\phi) \end{aligned}$$

Si $\mathbf{f}$ *y* $\mathbf{g}$ *son representadas por funciones singulares o regulares* f *y* g*, respectivamente, entonces se escribe* $f + g$ *y* αf *para las funciones generalizadas que representan* $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ *y* $\alpha \mathbf{f}$ *respectivamente.*

Es interesante notar que si **f** y **g** son distribuciones regulares representadas por las funciones regulares $f, g \in L(-\infty, \infty)$, respectivamente, entonces, la distribución $\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g}$ es una distribución regular representada por $\alpha f + \beta g$ ya que

$$\begin{aligned} (\alpha\mathbf{f} + \beta\mathbf{g})(\phi) &= \alpha\mathbf{f}(\phi) + \beta\mathbf{g}(\phi) \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi(t)\,dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\phi(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)]\,\phi(t)\,dt \end{aligned}$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}$.

De esta manera se ha demostrado que el conjunto de todas las distribuciones forman un espacio lineal complejo. De igual manera, el conjunto de todas las funciones generalizadas (regulares y singulares) es un espacio lineal sobre C que por abuso de notación se representa por $L(-\infty, \infty)$. En este espacio aquellas señales que son iguales en el sentido de las distribuciones son consideradas solo una misma señal.

DEFINICION 38 *(Escalamiento temporal) El escalamiento temporal de una distribución* **f** *por una constante α real no nula genera una distribución $\mu^{\alpha}\,\mathbf{f}$ definida por*

$$(\mu^{\alpha}\mathbf{f})(\phi) = \frac{1}{|\alpha|}\mathbf{f}\left(\mu^{1/\alpha}\phi\right)$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}$, donde μ^{α} representa el operador escalamiento temporal dado por

$$(\mu^{\alpha} f)(t) = f(\alpha t) \;\; \textit{para } t \in R$$

Si **f** *está representada por una función regular o singular f, entonces $\mu^{\alpha} f$ será la función generalizada que representa $\mu^{\alpha}\mathbf{f}$.*

Para motivar la definición anterior, suponga que **f** es una distribución regular representada por la función f, entonces por definición el escalamiento temporal de **f** por una cantidad α es una distribución dada por

$$(\mu^{\alpha}\mathbf{f})(\phi) = \frac{1}{|\alpha|}\mathbf{f}\left(\mu^{1/\alpha}\phi\right) = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\mu^{1/\alpha}\phi\right](t)\,dt = \frac{1}{|\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}$. Haga el cambio de variable $t/\alpha = \tau$ para obtener

$$(\mu^{\alpha}\mathbf{f})(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [\mu^{\alpha} f](\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Lo que demuestra que $\mu^{\alpha} f$ representa a $\mu^{\alpha}\mathbf{f}$ mostrándose así la consistencia de la definición dada.

EJEMPLO 39 *(Escalamiento de la función δ) Por definición*

$$\begin{aligned} [\mu^{\alpha}\boldsymbol{\delta}](\phi) &= \frac{1}{|\alpha|}\boldsymbol{\delta}\left(\mu^{1/\alpha}\phi\right) = \frac{1}{|\alpha|}\left(\mu^{1/\alpha}\phi\right)(0) = \frac{1}{|\alpha|}\phi(0/\alpha) \\ &= \frac{1}{|\alpha|}\phi(0) \end{aligned}$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Lo que quiere decir

$$\mu^{\alpha}\boldsymbol{\delta} = \frac{1}{|\alpha|}\boldsymbol{\delta}$$

y en términos de funciones generalizadas

$$\delta(\alpha t) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(t)$$

para cada $t \in R$.

Considere ahora el siguiente operador de traslación temporal de θ unidades de señales continuas en el tiempo:

$$\sigma^{\theta} : L(-\infty, \infty) \to L(-\infty, \infty) : f \longmapsto \sigma^{\theta}(f)$$

donde

$$\sigma^{\theta}(f)(t) = f(t+\theta)$$

para cada $t \in R$.

DEFINICION 40 *(Traslación temporal) La traslación temporal de una distribución* $\mathbf{f}$ *por un número real θ genera una distribución retardada $\sigma^{\theta}\mathbf{f}$ definida por*

$$\left[\sigma^{\theta}\mathbf{f}\right](\phi) = \mathbf{f}\left(\sigma^{-\theta}\phi\right)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Si $\mathbf{f}$ está representada por una función regular o singular f, entonces $\sigma^{\theta}f$ será la función generalizada que representa $\sigma^{\theta}\mathbf{f}$.

Para ver la consistencia de la definición dada, suponga que $\mathbf{f}$ es una distribución regular representada por f y por definición se tiene que

$$\left[\sigma^{\theta}\mathbf{f}\right](\phi) = \mathbf{f}\left(\sigma^{-\theta}\phi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\sigma^{-\theta}\phi\right](t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi(t-\theta)\,dt$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$. Realice el cambio de variable $\tau = t - \theta$ para obtener

$$\left[\sigma^{\theta}\mathbf{f}\right](\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+\theta)\,\phi(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sigma^{\theta}f\right](\tau)\,\phi(\tau)\,d\tau$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Lo que demuestra que $\sigma^{\theta}f$ representa la distribución $\sigma^{\theta}\mathbf{f}$.

EJEMPLO 41 *Por definición de traslación temporal de una distribución, se tiene que*

$$\left[\sigma^{\theta}\boldsymbol{\delta}\right](\phi) = \boldsymbol{\delta}\left(\sigma^{-\theta}\phi\right) = \left[\sigma^{-\theta}\phi\right](0) = \phi(0-\theta) = \phi(-\theta)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Y en términos de funciones generalizadas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+\theta)\,\phi(t)\,dt = \phi(-\theta)$$

En general el producto de dos distribuciones no está definida. La excepción ocurre cuando una de las distribuciones es regular y está representada por una función suave (infinitamente diferenciable).

DEFINICION 42 *Sea* $\mathbf{f}$ *una distribución cualquiera y* $\mathbf{g}$ *una distribución regular representada por una función regular suave* g, *entonces el producto* $\mathbf{fg}$ *es la distribución dada por*

$$[\mathbf{fg}](\phi) = \mathbf{f}(g\phi)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Si $\mathbf{f}$ *está representada por una función regular o singular* f, *entonces* fg *será la función generalizada que representa* $\mathbf{fg}$

.**Para** verificar la consistencia de la definición, suponga que $\mathbf{f}$ es una distribución regular representada por f. Entonces por definición, se tiene que

$$[\mathbf{fg}](\phi) = \mathbf{f}(g\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,[g(t)\,\phi(t)]\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\,g(t)]\,\phi(t)\,dt$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$, lo que demuestra que fg representa a $\mathbf{fg}$.

EJEMPLO 43 *Suponga que* $\mathbf{g}$ *es una distribución regular representada por una función regular suave* g, *entonces por definición de producto de distribuciones se tiene que*

$$[\boldsymbol{\delta}\mathbf{g}](\phi) = \boldsymbol{\delta}(g\phi) = g(0)\,\phi(0) = g(0)\,\boldsymbol{\delta}(\phi)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Y en términos de señales generalizadas

$$g(t)\,\delta(t) = g(0)\,\delta(t)$$

para cada $t \in R$.

A continuación se define la operación de diferenciación de distribuciones, y se observará algo realmente interesante: toda distribución y toda señal generalizada es infinitamente diferenciable (¿suave?).

DEFINICION 44 *(Diferenciación) La derivada de una distribución* $\mathbf{f}$ *es una distribución* $D\mathbf{f}$ *que se define por*

$$[D\mathbf{f}](\phi) = -\mathbf{f}[D\phi]$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$*. Si* $\mathbf{f}$ *está representada por una función regular o singular* f*, entonces* Df *será la función generalizada que representa* $D\mathbf{f}$*.*

Ya que por hipótesis las funciones de prueba son infinitamente diferenciables, se concluye de inmediato que toda distribución es infinitamente diferenciable. Por lo tanto, tiene sentido definir para cada $n \in Z_+$,

$$[D^n\mathbf{f}](\phi) = D\left[D^{n-1}\mathbf{f}(\phi)\right] = (-1)^n \mathbf{f}(D^n\phi)$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$.

Para ver que la anterior definición es consistente, suponga que $\mathbf{f}$ es una distribución regular representada por f. Entonces por definición se tiene

$$[D\mathbf{f}](\phi) = -\mathbf{f}[D\phi] = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)[D\phi](t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d\phi(t)}{dt}dt$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Integrando por partes se obtiene

$$[D\mathbf{f}](\phi) = -f(t)\,\phi(t)\big|_{t=-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}\phi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{df(t)}{dt}\phi(t)\,dt$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Aquí se ha empleado el hecho que $sop(\phi)$ es un conjunto acotado, y por lo tanto $\phi(-\infty) = \phi(\infty) = 0$. Y en consecuencia Df representa a la distribución $D\mathbf{f}$.

EJEMPLO 45 *El escalón unitario es la distribución* $\mathbf{1}$ *que se define como*

$$\mathbf{1}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} 1(t)\,\phi(t)\,dt = \int_{0}^{\infty}\phi(t)\,dt$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$*. Por lo tanto, la derivada de la distribución* $\mathbf{1}$ *está dada por*

$$\begin{aligned}[D\mathbf{1}](\phi) &= -\mathbf{1}[D\phi] = -\int_0^{\infty} D\phi(t)\,dt \\ &= -\int_0^{\infty}\frac{d\phi(t)}{dt}dt = \phi(0) = \boldsymbol{\delta}(\phi)\end{aligned}$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}$*. En consecuencia,* $D\mathbf{1} = \boldsymbol{\delta}$*; o expresado en términos de señales generalizadas*

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t) \;\; para\ t \in R$$

EJEMPLO 46 *Para calcular la $n-$ésima derivada de la distribución δ, recuerde que*

$$\left[D^n \boldsymbol{\delta}\right](\phi) = (-1)^n \boldsymbol{\delta}(D^n \phi) = (-1)^n \left.\frac{d^n \phi(t)}{dt^n}\right|_{t=0}$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$. Generalmente se representa por $\delta^{(n)}$ o $D^n \delta$ a la distribución $D^n \boldsymbol{\delta}$.

En términos de señales generalizadas, el resultado anterior se expresa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n \delta(t)}{dt^n} \phi(t)\, dt = (-1)^n \left.\frac{d^n \phi(t)}{dt^n}\right|_{t=0}$$

DEFINICION 47 *(Integral indefinida) Si $\mathbf{f}$ es una distribución, entonces cualquier distribución $\mathbf{F}$ tal que $D\mathbf{F} = \mathbf{f}$ se denomina la integral indefinida de $\mathbf{f}$.*

EJERCICIO 48 *(Sobre integrales indefinidas).*

1. *Sea $\mathbf{f}$ es una distribución regular representada por la función regular f, y sea F la integral indefinida (en el sentido normal) de f. Demuestre que la distribución $\mathbf{F}$ representada por F es una integral indefinida de la distribución $\mathbf{f}$.*

2. *Demuestre que si $\mathbf{F}$ es una integral indefinida de $\mathbf{f}$, también lo es $\mathbf{c} + \mathbf{F}$, con $\mathbf{c}$ una distribución regular representada por la constante $c \in C$.*

3. *Demuestre que el escalón unitario $1 \in L(-\infty, \infty)$ es una integral indefinida de la función δ.*

DEFINICION 49 *(Convergencia de secuencia y serie de distribuciones) a) (Convergencia): Una secuencia de distribuciones $\{\mathbf{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la distribución $\mathbf{f}$, si para cada $\phi \in \mathcal{D}$:*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{f}_n(\phi) = \mathbf{f}(\phi)$$

y se escribe

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{f}_n = \mathbf{f}$$

b) (series) La serie o suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n$ existe si la secuencia $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^{\infty}$ de sumas parciales

$$\mathbf{s}_k = \sum_{n=1}^{k} \mathbf{f}_n$$

converge cuando $k \to \infty$. O sea,

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{s}_k = \mathbf{s}$$

en cuyo caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n = \mathbf{s}$$

EJEMPLO 50 *(Peine infinito) Sea $h > 0$, se define la distribución peine infinito a*

$$\mathbf{w}_h = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^{kh} \boldsymbol{\delta}$$

Esta es una distribución bien definida ya que la secuencia de sumas parciales

$$\left[\sum_{k=-N}^{N} \sigma^{kh} \boldsymbol{\delta}\right](\phi) = \sum_{k=-N}^{N} \left[\sigma^{kh} \boldsymbol{\delta}\right](\phi) = \sum_{k=-N}^{N} \boldsymbol{\delta}\left(\sigma^{-kh} \phi\right) = \sum_{k=-N}^{N} \phi\left(-kh\right)$$

converge cuando $M \to \infty$ para cualquier $\phi \in \mathcal{D}$. Más aún, como ϕ e tiene soporte acotado, la suma solo tiene un número finito de términos distintos de cero. Dicha distribución representada en términos de señales generalizadas se expresa como

$$w_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t + kh\right)$$

Esto es una suma de señales δ separadas por h unidades de tiempo.

A continuación se presenta un resultado importante sin demostración.

TEOREMA 51 *a) (Convergencia de una secuencia de derivadas) Suponga que la secuencia de distribuciones $\{\mathbf{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a una distribución $\mathbf{f}$. Entonces la secuencia de derivadas $\{D\mathbf{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $D\mathbf{f}$.*

b) (Diferenciación e integración término a término) Suponga que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{f}_n = \mathbf{f}$$

existe. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\mathbf{f}_n = D\mathbf{f}$$

De igual manera, si $\mathbf{F}_n$ es la integral indefinida de $\mathbf{f}_n$ para $n \in Z_+$, y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_n = \mathbf{F}$$

existe, entonces $\mathbf{F}$ es la integral indefinida de $\mathbf{f}$.

EJEMPLO 52 *(Derivadas del peine infinito) La $n-$ésima derivada de la distribución peine infinito, $D^n \mathbf{w}_h$ se calcula de la manera siguiente*

$$\begin{aligned} D^n \mathbf{w}_h &= D^n \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^{kh} \boldsymbol{\delta}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D^n \left[\sigma^{kh} \boldsymbol{\delta}\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^{kh} \left(D^n \boldsymbol{\delta}\right) \end{aligned}$$

Y en términos de señales generalizadas se tiene que

$$\frac{d^n w_h(t)}{dt^n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t-kh)$$

DEFINICION 53 *(Distribuciones periódicas) Una distribución* $\mathbf{f}$ *es* ***periódica*** *si para algún* $h \in R_+$ *se cumple* $\sigma^h \mathbf{f} = \mathbf{f}$*. En cuyo caso, se dice que la distribución* $\mathbf{f}$ *tiene período* h *si* h *es número real positivo más pequeño tal que* $\sigma^h \mathbf{f} = \mathbf{f}$*.*

Como siempre, se debe demostrar la consistencia de la anterior definición. Para eso, suponga que $\mathbf{f}$ es una distribución regular representada por f. Entonces

$$\mathbf{f}(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi(t)\,dt$$

Entonces

$$\left(\sigma^h \mathbf{f}\right)(\phi) = \mathbf{f}\left[\sigma^{-h}\phi\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\sigma^{-h}\phi\right](t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi(t-h)\,dt$$

Introduzca el cambio de variable $\tau = t - h$ se obtiene

$$\left(\sigma^h \mathbf{f}\right)(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+h)\,\phi(\tau)\,d\tau$$

Por lo tanto, $\mathbf{f}$ es periódica si y solo si para todo $\phi \in \mathcal{D}$:

$$\left(\sigma^h \mathbf{f}\right)(\phi) = \mathbf{f}(\phi)$$

O sea, si y solo si

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau+h)\,\phi(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\phi(t)\,dt$$

O lo que es lo mismo, ssi para todo $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[f(t+h) - f(t)\right]\phi(t)\,dt = 0$$

En conclusión $\mathbf{f}$ es periódica si y solo si f es periódica:

$$f(t+h) = f(t) \text{ para todo } t \in R$$

y el período de $\mathbf{f}$ coincide con el período de f.

EJEMPLO 54 *La distribución peine* $\mathbf{w}_h$ *es periódica con período* h*. Ya que*

$$\begin{aligned}
\sigma^h \mathbf{w}_h &= \sigma^h \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^{kh}\boldsymbol{\delta}\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^h\left(\sigma^{kh}\boldsymbol{\delta}\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^{kh+h}\boldsymbol{\delta} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma^{(k+1)h}\boldsymbol{\delta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma^{nh}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{w}_h
\end{aligned}$$

References

[1] Kuo, F.F, "Networl Analysis and Synthesis". Seguanda edición, John Wiley, Japón, 1966.

[2] Mason, S.J y H.J. Zimmermann, "Circuitos, Señales y Sistemas Electrónicos", CECSA, México, 1962.

[3] Kwakernaak, H. y R. Sivan, "Modern signals and systems". Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.